3 - 7　等比数列の和の応用

1　次のような等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。（前回の復習）

(1)　初項 4，公比 3　　　(2)　初項 9，公比 -2

(1)
$$S_n = \frac{4(3^n-1)}{3-1}$$
$$S_n = 2(3^n-1)$$
$$S_n = 2\cdot 3^n - 2$$

(2)
$$S_n = \frac{9\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$
$$S_n = \frac{9\{1-(-2)^n\}}{3}$$
$$S_n = 3 - 3\cdot(-2)^n$$

2　初項が 54，公比が $\frac{1}{3}$，末項が $\frac{2}{3}$ である等比数列の和を求めよ。

$$a_n = 54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{54}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{27}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4}$$

$n-1=4$ より $n=5$

$$S = \frac{54\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= 54\times\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}$$
$$= 81 - 81\cdot\frac{1}{3^5}$$
$$= 81 - \frac{1}{3} = \frac{242}{3}$$
$$\frac{242}{3}$$

3　次のような等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 1，公比 2，末項 128　　　(2)　初項 243，公比 $-\frac{1}{3}$，末項 3

(1)
$$a_n = 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$
$$2^{n-1} = 128 = 2^7$$
$$n-1 = 7$$
$$n = 8$$
$$S = \frac{1\cdot(2^8-1)}{2-1}$$
$$= 2^8 - 1$$
$$= 255$$
$$S = 255$$

(2)
$$a_n = 243\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$243\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3$$
$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{81} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4$$
$$n-1 = 4$$
$$n = 5$$
$$S = \frac{243\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$= 243\times\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}$$
$$= 3^5\times\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{3^5}\right)$$
$$= \frac{3^6}{4} + \frac{3}{4}$$
$$= 183$$
$$S = 183$$

4　初項から第3項までの和が21，第3項から第5項までの和が84である等比数列の初項と公比を求めよ。

初項a_1，公比rとする

$$\begin{cases} a_1+a_1r+a_1r^2=21 & \cdots① \\ a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=84 & \cdots② \end{cases}$$

②より

$r^2(a_1+a_1r+a_1r^2)=84$

①を代入

$21r^2=84$，$r^2=4$　$r=\pm2$

$r=2$のとき

$a_1+2a_1+4a_1=21$

$a_1=3$

$r=-2$のとき

$a_1-2a_1+4a_1=21$

$a_1=7$

よって

初項3，公比2

または

初項7，公比-2

5　第2項が6，初項から第3項までの和が21である等比数列の初項と公比を求めよ。

初項a_1，公比rとする$(r\neq0)$

$$\begin{cases} a_1r=6 & \cdots① \\ a_1+a_1r+a_1r^2=21 & \cdots② \end{cases}$$

②より

$a_1(1+r+r^2)=21$ …②'

①より　$a_1r=6$

$r\neq0$なので

$a_1=\frac{6}{r}$　②'へ代入

$\frac{6}{r}(1+r+r^2)=21$

$6(1+r+r^2)=21r$

$6r^2-15r+6=0$

$2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$

$r=2,\ \frac{1}{2}$

$r=2$のとき，$a_1=3$

$r=\frac{1}{2}$のとき　$a_1=12$

初項3，公比2

または

初項12，公比$\frac{1}{2}$

6　初項から第6項までの和が3，初項から第12項までの和が9である等比数列において，初項から第18項までの和を求めよ。

初項a_1，公比rとする

$r=1$のとき，$S_6=6a_1$，$S_{12}=12a_1$

となるが　これをみたすa_1は存在しない。

$r\neq1$のとき

$S_6=\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=3$ …①

$S_{12}=\frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}=9$ …②

②より

$\frac{a_1(r^6-1)\times(r^6+1)}{r-1}=9$

①を代入

$3(r^6+1)=9$

$r^6=2$ …③

①へ$r^6=2$を代入

$\frac{a_1}{r-1}=3$ …④

$S_{18}=\frac{a_1(r^{18}-1)}{r-1}$

$=\frac{a_1}{r-1}\{(r^6)^3-1\}$

③，④より

$S_{18}=3\times(2^3-1)$

$=3\times7=21$

$S_{18}=21$

<今日のふりかえり>