1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots\cdots+n(n+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$$

この等式を(A)とする

(i) $n=1$ のとき

(左辺) $=1\cdot4=4$

(右辺) $=\frac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot6=4$ となり 成立

(ii) $n=k$ のとき

$1\cdot4+2\cdot5+\cdots+k(k+3)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+5)$ …① が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

(左辺) $=1\cdot4+2\cdot5+\cdots+k(k+3)+(k+1)(k+4)$

①より

$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+5)+(k+1)(k+4)$

$=\frac{1}{3}(k+1)\{k(k+5)+3(k+4)\}$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k^2+8k+12)$

$=\frac{1}{3}(k+1)(k+6)(k+2)$

$=\frac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+5\}$

$=$(右辺)

よって $n=k+1$ のとき成立

(i),(ii)より すべての自然数 n について (A)は成立する

2 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1+5+9+\cdots\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$$

この等式を(A)とする

(i) $n=1$ のとき

(左辺) $=1$

(右辺) $=1\cdot(2-1)=1$ となり 成立

(ii) $n=k$ のとき

$1+5+9+\cdots+(4k-3)=k(2k-1)$ …① が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

(左辺) $=1+5+\cdots+(4k-3)+(4k+1)$

①より

$=k(2k-1)+(4k+1)$

$=2k^2+3k+1$

$=(k+1)(2k+1)$

$=(k+1)\{2(k+1)-1\}=$(右辺)

よって $n=k+1$ のとき成立

(i),(ii)より すべての自然数 n について (A)は成立する

3　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots\cdots+n(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$$

この等式(A)とする

(i) $n=1$ のとき

$(左辺)=1\cdot3=3$

$(右辺)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot9=3$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき

$1\cdot3+2\cdot5+\cdots+k(2k+1)=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$ …①

と仮定

$n=k+1$ のとき

$(左辺)=1\cdot3+2\cdot5+\cdots+k(2k+1)+(k+1)(2k+3)$

① より

$=\frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)+(k+1)(2k+3)$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5)+6(2k+3)\}$

$=\frac{1}{6}(k+1)(4k^2+17k+18)$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9)$

$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\}$

$=(右辺)$

よって $n=k+1$ のときも成立

(i), (ii) より

すべての自然数 n について(A)は成立する。

4　n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ。

$$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

この等式(A)とする

(i) $n=1$ のとき

$(左辺)=1^2=1$，$(右辺)=\frac{1}{3}\cdot1\cdot1\cdot3=1$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき $1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$ …① と仮定

$n=k+1$ のとき

$(左辺)=1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$

① より

$=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+(2k+1)^2$

$=\frac{1}{3}(2k+1)\{k(2k-1)+3(2k+1)\}$

$=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)$

$=\frac{1}{3}(2k+1)(k+1)(2k+3)$

$=\frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)-1\}\{2(k+1)+1\}=(右辺)$

よって，$n=k+1$ のときも成立

<今日のふりかえり>

(i), (ii) より すべての自然数 n について (A)は成立する。