1 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\theta=45^\circ$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times6\times\cos45^\circ$$
$$=2\times6\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=6\sqrt{2}$$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=8$，$\theta=120^\circ$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times8\times\cos120^\circ$$
$$=\sqrt{3}\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\sqrt{3}$$

2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積 を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(-1,\ 5)$　　(2) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ -3)$

(3) $\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-4,\ 6)$　　(4) $\vec{a}=(-\sqrt{6},\ \sqrt{2})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

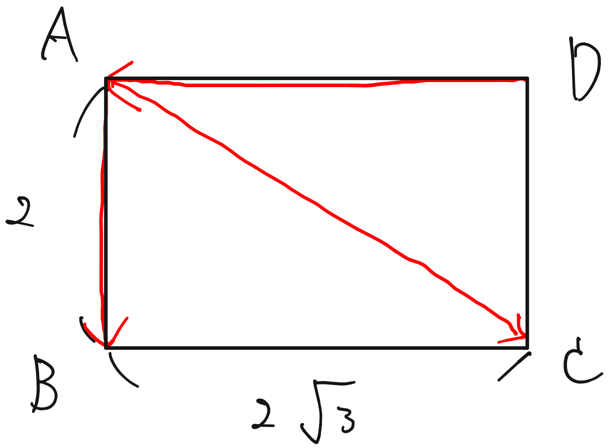
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+3\times5$
$$=-2+15$$
$$=13$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+(-1)\times(-3)$
$$=3+3$$
$$=6$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-4)+(-3)\times6$
$$=-8-18$$
$$=-26$$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{6}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot1$
$$=-3\sqrt{2}+\sqrt{2}$$
$$=-2\sqrt{2}$$

3 AB＝2，BC＝$2\sqrt{3}$ である長方形 ABCD において，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。



$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{DA}|=2\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AC}|=4$

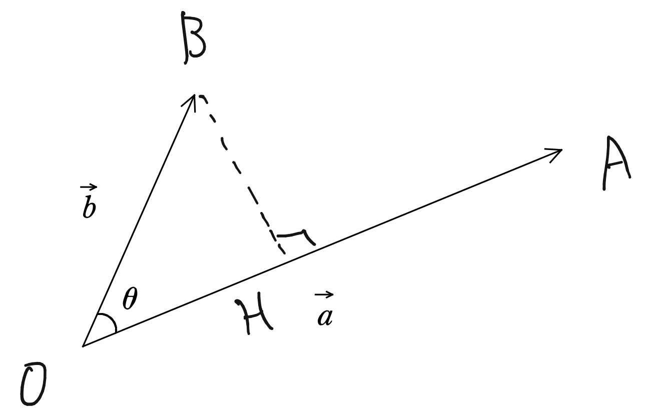
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{DA}$ のなす角 90°

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}=2\times2\sqrt{3}\times\cos90^\circ$$
$$=0$$

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角 60°

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4\times\cos60^\circ$$
$$=4$$

4　ベクトルの内積の図形的な意味を考えましょう。



点Bの真上に光源をおいたとき、

直線OA上にできる線分OBの影OH

$\vec{OH}$は$\vec{OB}$の$\vec{OA}$への正射影という

$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = |\vec{OA}|\cdot\underbrace{|\vec{OB}|\cos\theta}_{=|\vec{OH}|}$$

$$= |\vec{OA}|\times|\vec{OH}|$$

$\boxed{\vec{OA}\cdot\vec{OB}\text{は}|\vec{OA}|\text{と}|\vec{OH}|\text{のかけ算である}}$

5　AB＝2，BC＝$2\sqrt{3}$ である長方形 ABCD において，AC と BD の交点を O とする。このとき，次の内積を求めよ。

(1) $\vec{AB}\cdot\vec{BD}$　(2) $\vec{BD}\cdot\vec{DB}$　(3) $\vec{OC}\cdot\vec{AD}$　(4) $\vec{OA}\cdot\vec{OD}$

(1) $\vec{AB}$と$\vec{BD}$のなす角120°

$$\vec{AB}\cdot\vec{BD} = 2\times4\times\cos120^\circ$$
$$= 2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -4$$

(2) $\vec{BD}$と$\vec{DB}$のなす角180°

$$\vec{BD}\cdot\vec{DB} = 4\times4\times\cos180^\circ$$
$$= -16$$

(3) $\vec{OC}$と$\vec{AD}$のなす角30°

$$\vec{OC}\cdot\vec{AD} = 2\times2\sqrt{3}\cos30^\circ$$
$$= 2\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 6$$

(4) $\vec{OA}$と$\vec{OD}$のなす角は120°

$$\vec{OA}\cdot\vec{OD} = 2\times2\times\cos120^\circ$$
$$= 2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -2$$

<今日のふりかえり>