

1-8 ベクトルの内積①

1]  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とする。次の場合に内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

(1)  $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=6, \theta=45^\circ$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \times 6 \times \cos 45^\circ \\ &= 2 \times 6 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \underline{\underline{6\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

(2)  $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=8, \theta=120^\circ$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sqrt{3} \times 8 \times \cos 120^\circ \\ &= \sqrt{3} \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \underline{\underline{-4\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

2] 次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の内積を求めよ。

(1)  $\vec{a}=(2, 3), \vec{b}=(-1, 5)$

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \times (-1) + 3 \times 5 \\ &= -2 + 15 \\ &= \underline{\underline{13}} \end{aligned}$$

(2)  $\vec{a}=(\sqrt{3}, -1), \vec{b}=(\sqrt{3}, -3)$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} + (-1) \times (-3) \\ &= 3 + 3 \\ &= \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

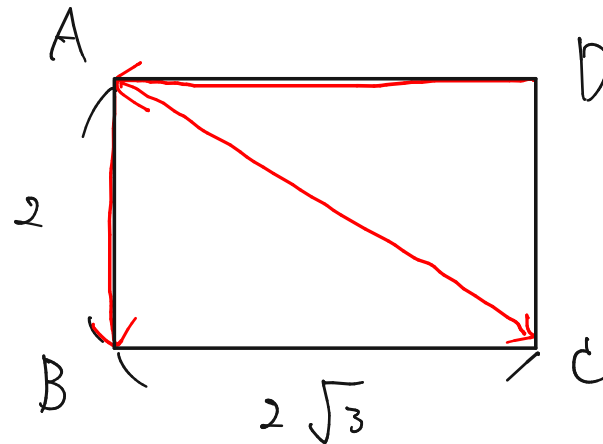
(3)  $\vec{a}=(2, -3), \vec{b}=(-4, 6)$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \times (-4) + (-3) \times 6 \\ &= -8 - 18 \\ &= \underline{\underline{-26}} \end{aligned}$$

(4)  $\vec{a}=(-\sqrt{6}, \sqrt{2}), \vec{b}=(\sqrt{3}, 1)$

$$\begin{aligned} \text{(4)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\sqrt{6} \times \sqrt{3} + \sqrt{2} \times 1 \\ &= -3\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= \underline{\underline{-2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

3]  $AB=2, BC=2\sqrt{3}$  である長方形 ABCD において、内積  $\vec{AB} \cdot \vec{DA}, \vec{AB} \cdot \vec{AC}$  を求めよ。



$$|\vec{AB}|=2, |\vec{DA}|=2\sqrt{3}, |\vec{AC}|=4$$

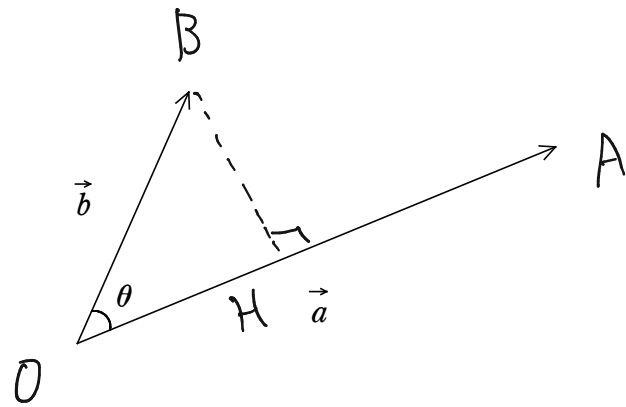
$$\vec{AB} \text{ と } \vec{DA} \text{ のなす角 } 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{DA} &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \cos 90^\circ \\ &= \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$$\vec{AB} \text{ と } \vec{AC} \text{ のなす角 } 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= 2 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

4 ベクトルの内積の図形的な意味を考えましょう。



点Bの真上に光源をおくと

直線OA上にできる線分の影がOH

OHはOBのOAへの正射影

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot \underbrace{|\vec{OB}| \cos \theta}_{|\vec{OH}|}$$

$$= |\vec{OA}| \times |\vec{OH}|$$

$\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  は  $|\vec{OA}| \times |\vec{OH}|$  の計算である

5  $AB=2, BC=2\sqrt{3}$  である長方形 ABCD において、AC と BD の交点を O とする。

このとき、次の内積を求めよ。

- (1)  $\vec{AB} \cdot \vec{BD}$       (2)  $\vec{BD} \cdot \vec{DB}$       (3)  $\vec{OC} \cdot \vec{AD}$       (4)  $\vec{OA} \cdot \vec{OD}$

(1)  $\vec{AB}$  と  $\vec{BD}$  のなす角  $120^\circ$       (2)  $\vec{BD}$  と  $\vec{DB}$  のなす角  $180^\circ$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{BD} &= 2 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{BD} \cdot \vec{DB} &= 4 \times 4 \times \cos 180^\circ \\ &= -16 \end{aligned}$$

(3)  $\vec{OC}$  と  $\vec{AD}$  のなす角  $30^\circ$

$$\begin{aligned} \vec{OC} \cdot \vec{AD} &= 2 \times 2\sqrt{3} \cos 30^\circ \\ &= 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

(4)  $\vec{OA}$  と  $\vec{OD}$  のなす角は  $120^\circ$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OD} &= 2 \times 2 \times \cos 120^\circ \\ &= 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

<今日のふりかえり>