

1-6 ベクトルの成分表示と計算①

1 原点 O と 3 点 A(17, 4), B(10, 5), C(1, 2) がある。このとき、 \vec{OA} を適当な実数 s, t を用いて $s\vec{OB} + t\vec{OC}$ の形に表せ。

$$\vec{OA} = s\vec{OB} + t\vec{OC} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{cases} 10s + t = 17 \\ 5s + 2t = 4 \end{cases}$$

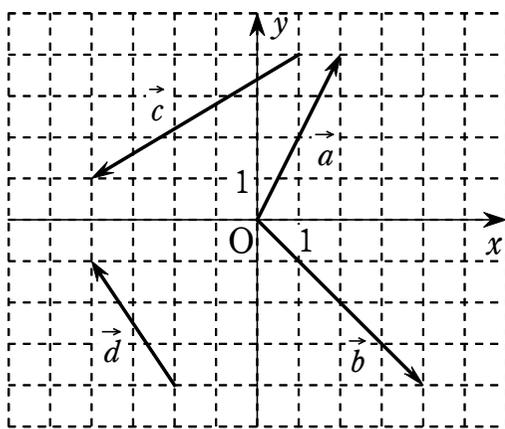
$$\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10s + t \\ 5s + 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow 20s + 2t = 34 \\ & \quad -15s = -30 \\ & \quad s = 2, t = -3 \end{aligned}$$

$$\vec{OA} = 2\vec{OB} - 3\vec{OC}$$

2 右の図のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ を、それぞれ成分表示せよ。また、各ベクトルの大きさを求めよ。



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, |\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, |\vec{d}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

3 $\vec{a} = (3, 4), \vec{b} = (-2, 3)$ のとき、次のベクトルを成分表示せよ。

- (1) $\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} - \vec{b}$ (3) $-3\vec{a}$
 (4) $-2\vec{a} + 3\vec{b}$ (5) $-3(-\vec{a} + 2\vec{b})$ (6) $-2\vec{a} + 3\vec{b}$

$$\begin{aligned} (1) \vec{a} + \vec{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (2) \vec{a} - \vec{b} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) -3\vec{a} &= \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix} \\ (5) -3(-\vec{a} + 2\vec{b}) &= 3\vec{a} - 6\vec{b} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 $\vec{a} = (-2, 3), \vec{b} = (1, -2)$ とする。次のベクトルを、適当な実数 s, t を用いて $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せ。

- (1) $\vec{c} = (1, -4)$

$$\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + t \\ 3s - 2t \end{pmatrix}$$

$$s = 2, t = 5$$

$$\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$$

- (2) $\vec{d} = (5, -9)$

$$\vec{d} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + t \\ 3s - 2t \end{pmatrix}$$

$$s = -1, t = 3$$

$$\vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}$$

1-6 ベクトルの成分表示と計算①

5 3点 A(1, 2), B(3, 5), C(5, -1) について, 次のベクトルを成分表示せよ。また, その大きさを求めよ。

(1) \overrightarrow{AB}

(2) \overrightarrow{BA}

(3) \overrightarrow{BC}

(4) \overrightarrow{CA}

$$\begin{aligned} (1) \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$$

$$(4) \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 5$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = 5$$

6 $\vec{a} = (5, -3)$, $\vec{b} = (3, 4)$ とする。

(1) 等式 $3\vec{a} + \vec{x} = 2\vec{b}$ を満たす \vec{x} を成分表示せよ。

(2) 等式 $3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{x} - \vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$ を満たす \vec{x} , \vec{y} を成分表示せよ。

$$(1) 3\vec{a} + \vec{x} = 2\vec{b}$$

$$\vec{x} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$= -3 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -15 + 6 \\ 9 + 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$(2) 3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$2\vec{x} - 2\vec{y} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$+ 3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$5\vec{x} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{x} = \frac{3}{5}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{3}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\vec{x} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{y} = \vec{x} - (\vec{a} + \vec{b}) \\ = -\frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= -\frac{2}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

<今日のふりかえり>