1 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(2) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$　(3) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)$

(4) $\sum_{k=1}^{n}(k^3-4k)$　(5) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$　(6) $\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-5k)$

(1) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$

$= 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3$

$= 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 3n$

$= n(n+4)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 6\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 5n$

$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 18(n+1) + 30\}$

$= \frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)$

$= \frac{1}{6}n(2n-13)(n-1)$

(4) $\sum_{k=1}^{n} k^3 - 4\sum_{k=1}^{n} k$

$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-8\}$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$

(5) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-k-2)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - 2n$

$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 3(n+1) - 12\}$

$= \frac{1}{6}n(2n^2-14)$

$= \frac{1}{3}n(n^2-7)$

(6) $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n-1} k$

$= \frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}$

$- 5\times\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$

$= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - \frac{5}{2}(n-1)\times n$

$= \frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$

2 数列 1·4，3·7，5·10，7·13，…… の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1$

$4, 7, 10, 13, \cdots, 3n+1$

よって この数列の第n項は $(2n-1)\times(3n+1) = 6n^2-n-1$

$S = \sum_{k=1}^{n}(6k^2-k-1)$

$= 6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - n$

$= \frac{1}{2}n\{2(n+1)(2n+1) - (n+1) - 2\}$

$= \frac{1}{2}n(4n^2+5n-1)$

3 次の和を求めよ。

(1) $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots\cdots+n(2n-1)$

(2) $1^2\cdot3+2^2\cdot4+3^2\cdot5+\cdots\cdots+n^2(n+2)$

(1) $\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)$

$= \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

中から順番に
計算する。

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+2)$

$= \sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2)$

$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2+\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

$= \frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)+4(2n+1)\}$

$= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+11n+4)$

4 和 $\sum_{n=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$ を求めよ。

$\sum_{n=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{n=1}^{l}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$= \sum_{n=1}^{l}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)$

(与式) $= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l} n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l} n$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l(l+1) = \frac{1}{6}l(l+1)(l+2)$

5 次の数列の第 k 項 a_k と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

1，1+3，1+3+9，1+3+9+27，……

$a_k = 1+3+9+\cdots+3^{k-1}$

$= \frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^k-1)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 3^k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{1}{2}n$

$S_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(3^n-1)-\frac{1}{2}n$

$= \frac{1}{4}\{(3\cdot3^n-3)-2n\}$

$= \frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

<今日のふりかえり>