$\boxed{1}$ $a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$

$(\div 2^{n+1})$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2\cdot 2^n}+\frac{2\cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+2$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_1=5$

$b_{n+1}=b_n+2$，$b_1=5$

(2) $b_n=5+(n-1)\times 2$

$b_n=2n+3$，$a_n=(2n+3)\times 2^n$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[　] で示したおき換えを利用することにより求めよ。

(1)　$a_1=\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=4n+1$　$\left[b_n=\dfrac{1}{a_n}\right]$

(2)　$a_1=6$，$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$　$\left[b_n=\dfrac{a_n}{3^n}\right]$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+4}$　$\left[b_n=\dfrac{1}{a_n}\right]$

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$b_{n+1}-b_n=4n+1$

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=5$

階差型であることを確認!!

$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$$

$$=5+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n+(n-1)$$

$b_n=2n^2-n+4$

$n=1$ のとき

$b_1=2-1+4=5$ となり成立

よって

$$a_n=\frac{1}{2n^2-n+4}$$

(2) $a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$

$(\div 3^{n+1})$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{6a_n}{3\cdot 3^n}+1$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{3^n}+1$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{6}{3}=2$

$b_{n+1}=2b_n+1$

$\left(\begin{array}{l}\beta=2\beta+1\\ \beta=-1\end{array}\right)$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$b_1+1=2+1=3$

$b_n+1=3\cdot 2^{n-1}$

$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

$a_n=3^n(3\cdot 2^{n-1}-1)$

(3) $a_1>0$ であり

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+4}$ より

$a_n>0$ である。

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+4}$$

の逆数をとると，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+4}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4}{a_n}+3$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$b_1=1$

$b_{n+1}=4b_n+3$

$\left(\begin{array}{l}\beta=4\beta+3\\ \beta=-1\end{array}\right)$

$b_{n+1}+1=4(b_n+1)$

$b_1+1=2$

$b_n+1=2\cdot 4^{n-1}$

$b_n=2\cdot 4^{n-1}-1$

$$a_n=\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$$

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[　] で示したおき換えを利用することにより求めよ。

(1) $a_1=-1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$　$\left[b_n=\dfrac{a_n}{n}\right]$

(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$　$[b_n=a_{n+1}-a_n]$

(1) $na_{n+1}=(n+1)a_n$

$\div n(n+1)$

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくと

$b_1=-1$

$b_{n+1}=b_n$

$b_n=-1$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ より

$a_n=-n$

(2) $a_{n+1}=2a_n+n-1$

$a_{n+2}=2a_{n+1}+(n+1)-1$

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$b_{n+1}=2b_n+1$，$b_1=1$

$\begin{pmatrix}\beta=2\beta+1\\ \beta=-1\end{pmatrix}$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$b_1+1=2$

$b_n+1=2\cdot2^{n-1}$

$b_n=2^n-1$

さらに階差を解く…。

$a_{n+1}-a_n=2^n-1$

$n\geqq2$ のとき

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)$

$a_n=2^n-n$

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n-1$

$\begin{pmatrix}\alpha=2\alpha+n-1\\ \alpha=-n+1\end{pmatrix}$

変形はできたが，番号がそろっていない!!

$a_{n+1}+n-1=2(a_n+n-1)$

番号をそろえた!!

$a_{n+1}+(n+1)-1=2(a_n+n-1)+1$

$b_n=a_n+n-1$ とおくと

$b_{n+1}=2b_n+1$，$b_1=1$

$\begin{pmatrix}\beta=2\beta+1\\ \beta=-1\end{pmatrix}$

$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

$b_1+1=2$

$b_n+1=2\cdot2^{n-1}$

$b_n=2^n-1$

$b_n=a_n+n-1$ より

$a_n=2^n-n$

<今日のふりかえり>

$n=1$ のとき

$a_1=2-1=1$ となり成立

$a_n=2^n-n$