1 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直になるように，x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ 6)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$-2\times x+3\times 6=0$

$-2x+18=0$，$x=9$

(2)　$\vec{a}=(-3,\ x^2)$，$\vec{b}=(6,\ 2)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$-18+2x^2=0$

$x^2=9$．$x=\pm 3$

2 2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ x)$ について，$2\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が平行になるとき，x の値を求めよ。

$2\vec{a}+3\vec{b}=\begin{pmatrix}-2+3\\4+3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4+3x\end{pmatrix}$

$\vec{a}-2\vec{b}=\begin{pmatrix}-1-2\\2-2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2-2x\end{pmatrix}$

$2\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-2\vec{b}\neq\vec{0}$ より $2\vec{a}+3\vec{b}\parallel\vec{a}-2\vec{b}$ となるためには，

$2\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-2\vec{b})$ となる実数 k が存在すればよい

$\begin{pmatrix}1\\4+3x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3k\\2k-2kx\end{pmatrix}$

$\begin{cases}1=-3k\\4+3x=2k-2kx\end{cases}$

$k=-\frac{1}{3}$，$4+3x=-\frac{1}{3}(2-2x)$

$x=-2$

以上より

実数 k が存在し，$2\vec{a}+3\vec{b}\parallel\vec{a}-2\vec{b}$

となり，このとき $x=-2$

3 $\vec{a}=(4,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ -1)$，$\vec{x}=(p,\ q)$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行で，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるとき，p，q の値を求めよ。

$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}4-3\\2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\vec{x}-\vec{b}=\begin{pmatrix}p-3\\q+1\end{pmatrix}$

$\vec{x}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より $\vec{x}\parallel\vec{a}-\vec{b}$ となるためには

$\vec{x}=k(\vec{a}-\vec{b})$ となる実数 k が存在すればよい

$\vec{x}=k\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\vec{x}=\begin{pmatrix}k\\3k\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\3k\end{pmatrix}$ …①

$\vec{x}-\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\neq\vec{0}$ より $\vec{x}-\vec{b}\perp\vec{a}$ となるので

$(\vec{x}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

$(p-3)\times 4+(q+1)\times 2=0$

$4p-12+2q+2=0$

$4p+2q=10$

$2p+q=5$ …②

①より $p=k$，

$q=3k$

②へ代入

$2k+3k=5$

$k=1$

$p=1$，$q=3$

以上より

$p=1$，$q=3$

$\boxed{4}$ (1) $\vec{a}=(\sqrt{5},\ 2)$ に垂直で大きさが 6 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\vec{a}=(-3,\ 4)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

(1) $\vec{b}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく

$|\vec{b}|=6$ より

$x^2+y^2=36$ …①

$\vec{a}\perp\vec{b}$ より

$\sqrt{5}x+2y=0$

$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$ …②

①に②を代入

$x^2+\frac{5}{4}x^2=36$

$9x^2=36\cdot4$

$x^2=16$

$x=\pm4$

$\vec{b}=(4,-2\sqrt{5}),\ (-4,\ 2\sqrt{5})$

(2) $\vec{e}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおく

$|\vec{e}|=1$ より

$p^2+q^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より

$-3p+4q=0$

$q=\frac{3}{4}p$ …②

①に②を代入

$p^2+\frac{9}{16}p^2=1$

$25p^2=16$

$p^2=\frac{16}{25}$

$p=\pm\frac{4}{5}$

$\vec{e}=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right),\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$

$\boxed{5}$ $\vec{a}=(2,\ -1)$ とのなす角が 45° で，大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{b}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく

$|\vec{b}|=\sqrt{10}$ より

$x^2+y^2=10$ …①

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 45° より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45°$

$2x-y=\sqrt{2^2+(-1)^2}\times\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2x-y=\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2x-y=5$

$y=2x-5$ …②

①に②を代入

$x^2+4x^2-20x+25=10$

$5x^2-20x+15=0$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x=1,3.$

$\vec{b}=(1,-3),\ (3,\ 1)$

<今日のふりかえり>