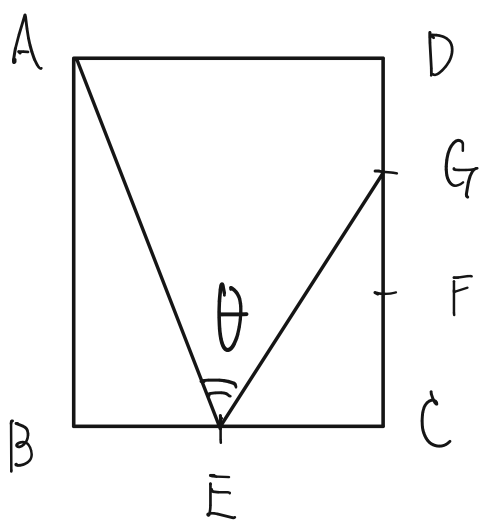
1　AB=3,BC=2の長方形ABCDについて、BCの中点E、CDの３等分点をCに近い順にF、Gとする。このとき、∠AEGを求めよ。



〈解1〉
作図による解法
AGをひっぱれば、
△AEGは直角二等辺三角形

〈解2〉
三角関数の加法定理を利用

〈解3〉
ベクトル

$\overrightarrow{AE}=(-1,3),\ \overrightarrow{EG}=(1,2)$

$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$　　$\overrightarrow{EG}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EG}=|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{EG}|\cos\theta$

$-1+6=\sqrt{10}\times\sqrt{5}\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\theta=45^\circ$　　$\angle AEG=45^\circ$

2　次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 5)$　　(2)　$\vec{a}=(\sqrt{3},\ -1)$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ -3)$

(3)　$\vec{a}=(2,\ -3)$, $\vec{b}=(-4,\ 6)$　　(4)　$\vec{a}=(-\sqrt{6},\ \sqrt{2})$, $\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

(1)

$\cos\theta=\frac{-2+15}{\sqrt{4+9}\sqrt{1+25}}=\frac{13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=45^\circ$

(2)

$\cos\theta=\frac{3+3}{\sqrt{3+1}\sqrt{3+9}}=\frac{6}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=30^\circ$

(3)

$\cos\theta=\frac{-8-18}{\sqrt{4+9}\sqrt{16+36}}=\frac{-26}{\sqrt{13}\sqrt{52}}=\frac{-26}{\sqrt{13}\times2\sqrt{13}}=-1$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=180^\circ$

(4)

$\cos\theta=\frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{6+2}\sqrt{3+1}}=\frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times2}=-\frac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より

$\theta=120^\circ$

3 次の２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -6)$　　(2)　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-4,\ 6)$

(3)　$\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$　　(4)　$\vec{a}=(-3,\ 1)$，$\vec{b}=(3+\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}-1)$

(1)

$$\cos\theta=\frac{6-6}{\sqrt{4+1}\sqrt{9+36}}$$

$$\cos\theta=0$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$\theta=90^\circ$$

(2)

$$\cos\theta=\frac{-8-18}{\sqrt{4+9}\sqrt{16+36}}=\frac{-26}{\sqrt{13}\times 2\sqrt{13}}=-1$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　$\theta=180^\circ$

(3)

$$|\vec{b}|=\sqrt{1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{\sqrt{1+1}\times 2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$\theta=60^\circ$$

(4)

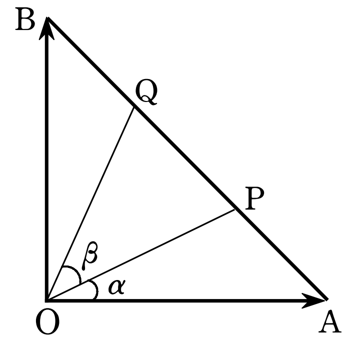
$$|\vec{b}|=\sqrt{9+6\sqrt{3}+3+27-6\sqrt{3}+1}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\cos\theta=\frac{-9-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}-1}{\sqrt{9+1}\times 2\sqrt{10}}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$\theta=120^\circ$$

4 平面上で，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は直交し，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ を満たすとする。線分 AB を３等分し，右図のように，A に近い点を P，B に近い点を Q とする。$\angle AOP=\alpha$，$\angle POQ=\beta$ とするとき，$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。



O(0,0)とおくと B(0,1), A(1,0)

P,Qは線分ABの3等分点なので

$P\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $Q\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ である

$$\cos\alpha=\frac{\frac{2}{3}}{1\times\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{2}{9}+\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{4}{5}$$

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$

<今日のふりかえり>