$\boxed{1}$ $a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　第 n 項 a_n を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1) $a_2=a_1{}^2+2a_1-2=-3$

$a_3=a_2{}^2+2\cdot 2a_2-2=-5$

$a_4=a_3{}^2+2\cdot 3a_3-2=-7$

(2) (1)より $a_n=-(2n-1)$，$a_n=-2n+1$ と推測

(i) $n=1$ のとき $a_1=-2+1=-1$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき $a_k=-2k+1$ と仮定 …①

$n=k+1$ のとき

$a_{k+1}=a_k{}^2+2ka_k-2$

①を代入

$=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2$

$=-2k-1=-2(k+1)+1$

となり $n=k+1$ のときも成立

(i)，(ii) より

すべての自然数 n について $a_n=-2n+1$

$\boxed{2}$ $a_1=3$，$(n+1)a_{n+1}=a_n{}^2-1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測して，それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

n は自然数なので $n+1\neq 0$　$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2-1}{n+1}$ とする

$a_2=\dfrac{9-1}{2}=4$，$a_3=\dfrac{16-1}{3}=5$ より $a_n=n+2$ とおく

(i) $n=1$ のとき $a_1=1+2=3$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき $a_k=k+2$ と仮定

$n=k+1$ のとき

$a_{k+1}=\dfrac{a_k{}^2-1}{k+1}=\dfrac{(k+2)^2-1}{k+1}$

$=\dfrac{k^2+4k+3}{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+3)}{k+1}=k+3$

$=(k+1)+2$

となり成立

(i)，(ii) より

すべての自然数 n について

$a_n=n+2$

3 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次のことを証明せよ。

(1)　6^n-1 は 5 の倍数である。　　(2)　$2n^3+3n^2+n$ は 6 の倍数である。

(1) (i) $n=1$ のとき $6^1-1=5$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき $6^k-1=5m$ (m は整数) と仮定する …①

$n=k+1$ のとき $6^{k+1}-1=6\cdot6^k-1$ ①より

$=6(5m+1)-1=30m+5$

$=5(6m+1)$

m は整数より 6m+1 も整数 すなわち $6^{k+1}-1$ は 5 の倍数

(i), (ii) より すべての自然数 n において

6^n-1 は 5 の倍数

(2) (i) $n=1$ のとき

$2+3+1=6$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき

$2k^3+3k^2+k=6m$ (m は整数) と仮定する …①

$n=k+1$ のとき

$2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1)$

$=2k^3+9k^2+13k+6$

$=(2k^3+3k^2+k)+6k^2+12k+6$

①より

$=6m+6k^2+12k+6$

$=6(m+k^2+2k+1)$

m は整数, k は自然数 なので $m+k^2+2k+1$ も整数

よって $6(m+k^2+2k+1)$ は 6 の倍数

(i), (ii) より すべての自然数 n において $2n^3+3n^2+n$ は 6 の倍数

4 n は自然数とする。$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数であることを証明せよ。

(i) $n=1$ のとき $3^2+4=9+4=13$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき $3^{k+1}+4^{2k-1}=13m$ (m は整数) とする …①

$n=k+1$ のとき

$3^{k+2}+4^{2k+1}=3\cdot3^{k+1}+4^{2k+1}$

①より

$=3(13m-4^{2k-1})+4^{2k+1}$

$=39m-3\cdot4^{2k-1}+4^2\cdot4^{2k-1}$

$=39m+13\cdot4^{2k-1}$

$=13(3m+4^{2k-1})$

ここの変形がポイント!!

m は整数, k は自然数なので $3m+4^{2k-1}$ は整数

よって $13(3m+4^{2k-1})$ は 13 の倍数

(i), (ii) より

すべての自然数 n において

$3^{n+1}+4^{2n-1}$ は 13 の倍数

<今日のふりかえり>