（等差×等比型）

[1] 和 $S=\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\cdots\cdots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ を次の手順に従って求めよ。

(1) k についての恒等式 $\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{a}{4k-1}-\frac{b}{4k+3}$ を満たす a,b を求めよ。

(2) (1)を利用して、S を求めよ。

(1)
$$\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{4ak+3a-4bk+b}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{4(a-b)k+3a+b}{(4k-1)(4k+3)}$$

kについての恒等式なので、

$$\begin{cases}4(a-b)=0\\3a+b=1\end{cases}\qquad \underline{a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4}}$$

(2) (1)より
$$\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{11}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{4n-1}}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\underline{\frac{n}{3(4n+3)}}$$

[2] 和 $S=1\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$ を求めよ。

$$S=1\cdot 1+3\cdot 3+\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$$
$$-)\ 3S=\qquad 1\cdot 3+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n$$

$$-2S=1+2\cdot 3+\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$-2S=1+2\underbrace{(3+\cdots+3^{n-1})}_{\text{初}3\ \text{比}3\ \text{項数}\ n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$-2S=1+2\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$-2S=1+3^n-3-(2n-1)\times 3^n$$

$$-2S=-2+3^n-(2n-1)\cdot 3^n$$

$$-2S=-2+\{1-(2n-1)\}3^n$$

$$-2S=-2+(2-2n)\cdot 3^n$$

$$S=1+(n-1)\cdot 3^n$$

$$\underline{S=(n-1)\cdot 3^n+1}$$

[3] 次の和 S を求めよ。

(1) $S=\dfrac{1}{2\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot11}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{8}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{3n-1}}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

$$S=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$

$$S=\frac{n}{2(3n+2)}$$

[4] 次の和 S を求めよ。

(1) $S=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$

(2) $S=5\cdot1+9\cdot3+13\cdot3^2+\cdots\cdots+(4n+1)\cdot3^{n-1}$

(1)

$$S=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

$$-)\ 2S=1\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+(2n-3)\cdot2^{n-1}+(2n-1)\cdot2^n$$

$$-S=1+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots+2\cdot2^{n-1}-(2n-1)\cdot2^n$$

$$-S=1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\cdot2^n$$

$$=1+\frac{2^2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n-1)\cdot2^n$$

$$S=(2n-3)\cdot2^n+3$$

(2)

$$S=5\cdot1+9\cdot3+13\cdot3^2+\cdots+(4n+1)\cdot3^{n-1}$$

$$-)\ 3S=5\cdot3+9\cdot3^2+\cdots+(4n-3)\cdot3^{n-1}+(4n+1)\cdot3^n$$

$$-2S=5+4\cdot3+4\cdot3^2+\cdots+4\cdot3^{n-1}-(4n+1)\cdot3^n$$

$$-2S=5+4(3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(4n+1)\cdot3^n$$

$$-2S=5+4\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(4n+1)\cdot3^n$$

$$-2S=(1-4n)\cdot3^n-1$$

$$S=\frac{1-(1-4n)\cdot3^n}{2}$$

<今日のふりかえり>

ずらす系は、後半の計算が大変です。
最後まで気をぬかずにがんばりましょう