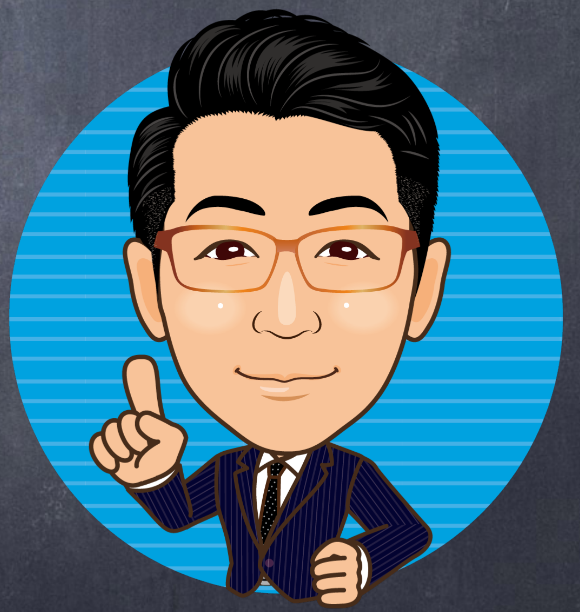
パターンのある
いろいろな数列

教科書 p.94

① 部分分数分解

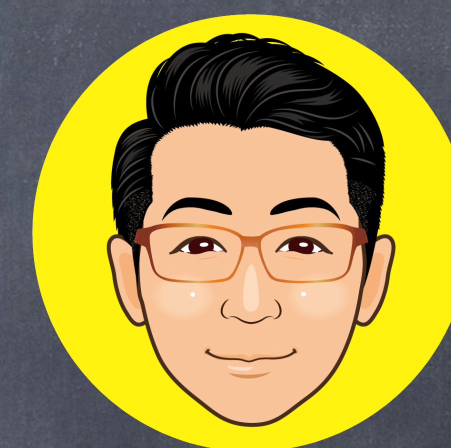
② ずらす系



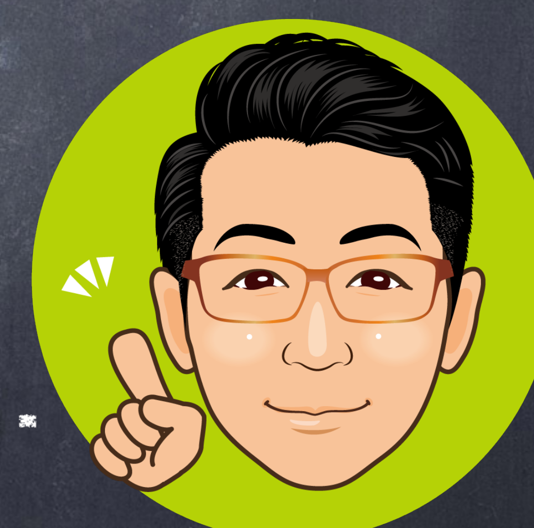
○ 部分分数分解

$$S = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

(解1) $$\xcancel{S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} (k^2+k)}} = \cdots$$



(解2) $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$ と利用する。



ひき算で分解するのがポイント!!

(解2)のつづき.

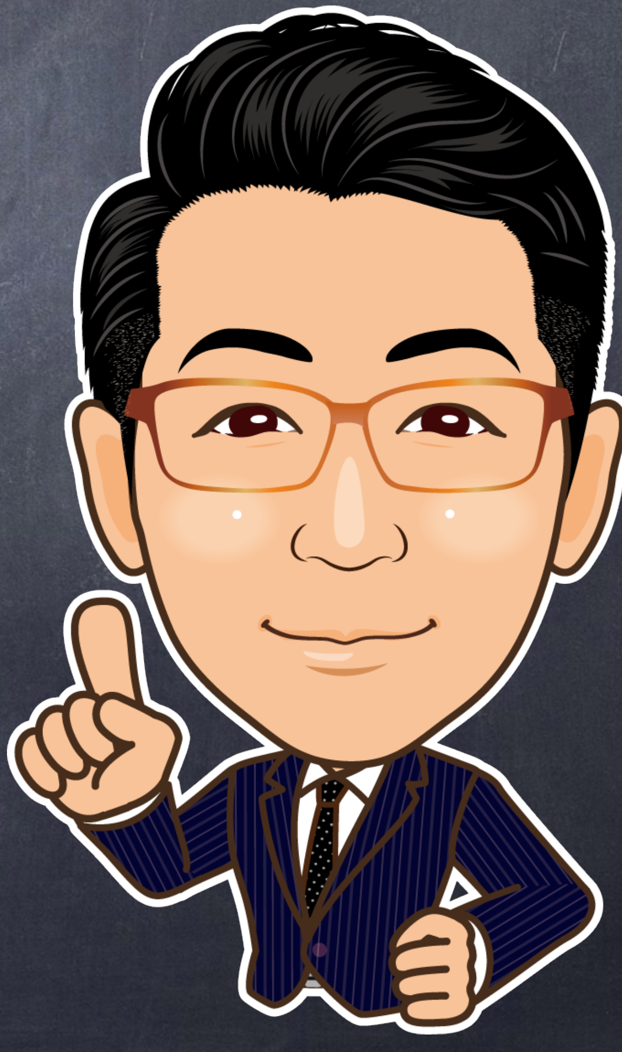
$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

恒等式も
使ってしよう!!

$$S=\frac{n}{n+1}$$

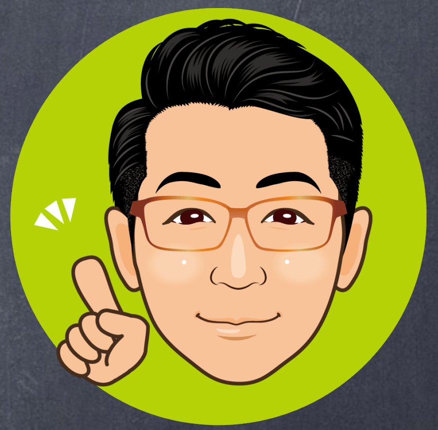


・ずらす法（等比とイメージ）

$$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + n\cdot 2^{n-1}$$

$$-)\ 2S = \qquad 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \cdots + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n$$

$$-S = \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}}_{a_1=1,\ r=2,\ \text{項数}n\text{の等比の和}} - n\cdot 2^n$$



$$-S = \frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2} - n\cdot 2^n$$

$$S = 1-2^n + n\cdot 2^n$$

$$\underline{S = (n-1)\cdot 2^n + 1}$$

〈まとめ〉

① 等差・等比の基本パターン

② Σ系

③ 型にはめるパターン

④ 等差・等比へ $\boxed{\text{帰着}}$