1　3点 A(1，3)，B(4，6)，D(3，−2) がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるとき，頂点 C の座標を，ベクトルを用いて求めよ。

点Cの座標 (x, y) とおく。

四角形ABCDが平行四辺形となるためには

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ となればよい

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4-1\\6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ より

$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3\\y+2\end{pmatrix}$

$x=6,\ y=1$

よって $C(6,1)$

2　$\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル　　(2)　$\vec{b}$ と平行な単位ベクトル

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ より

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$

よって

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(2) $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ より

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

よって

$\vec{b}$ と平行な単位ベクトル

$\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}\vec{b}=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}\vec{b}$

よって

$\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}\vec{b}=\left(\mp\dfrac{\sqrt{10}}{10},\ \pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

複号同順

3　次の2つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(x,\ -12)$　　(2)　$\vec{a}=(3,\ x^2-x)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$

(1) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ なので．

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるためには

$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k

が存在すればよい

文字が重ならないように k をつける

$\vec{b}=k\vec{a}$ より

$\begin{pmatrix}x\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2k\\-3k\end{pmatrix}$

$x=2k,\ -12=-3k$

$k=4.$

$x=8$

実数 k が存在するため

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となり

このとき

$x=8$

(2) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ なので

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となるためには

$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k

が存在すればよい

$\vec{a}=k\vec{b}$ より

$\begin{pmatrix}3\\x^2-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\2k\end{pmatrix}$

$3=k,\ x^2-x=2k$

$x^2-x=6$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3,-2$

実数 k が存在するため

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ となり

このとき

$x=3,\ -2$

$\boxed{4}$ $\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ について，$\vec{b}-\vec{a}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

$$\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}2-x\\-3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-x\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+3\vec{b}=\begin{pmatrix}x+6\\-1-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+6\\-10\end{pmatrix}$$

$\vec{b}-\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$ なので

$\vec{b}-\vec{a}\ /\!/\ \vec{a}+3\vec{b}$ となるためには，

$\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$ となる

実数 k が存在すればよい

$$\begin{cases}x+6=k(2-x)\\-10=-2k\end{cases}$$

$k=5$，$x+6=5(2-x)$

$6x=4$

$x=\frac{2}{3}$

実数 k が存在するので．

$\vec{b}-\vec{a}\ /\!/\ \vec{a}+3\vec{b}$ となり

このとき $x=\frac{2}{3}$

$\boxed{5}$ $\vec{a}=(10,\ 5)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ で，t は実数とする。$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+t\\5+2t\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(10+t)^2+(5+2t)^2}$$

$$=\sqrt{100+20t+t^2+25+20t+4t^2}$$

$$=\sqrt{5t^2+40t+125}$$

$$=\sqrt{5(t+4)^2+45}$$

$t=-4$ のとき

min $\sqrt{45}$

すなわち

$t=-4$ のとき

最小値 $3\sqrt{5}$

$\boxed{6}$ $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。ただし，t は実数である。

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ を満たす t の値を求めよ。

(2)　$|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

(1) $$\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3t\\1+4t\end{pmatrix}$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{(2+3t)^2+(1+4t)^2}$$

$$=\sqrt{4+12t+9t^2+1+8t+16t^2}$$

$$=\sqrt{25t^2+20t+5}$$

$|\vec{c}|=\sqrt{10}$ より

$\sqrt{25t^2+20t+5}=\sqrt{10}$

$25t^2+20t+5=10$

$5t^2+4t-1=0$

$(t+1)(5t-1)=0$

$t=-1,\ \frac{1}{5}$

$t=-1,\ \frac{1}{5}$

(2) (1) より

$$|\vec{c}|=\sqrt{25t^2+20t+5}$$

$$=\sqrt{25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+1}$$

$t=-\frac{2}{5}$ のとき min $\sqrt{1}$

すなわち

$t=-\frac{2}{5}$ のとき

最小値 1

<今日のふりかえり>