1 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次のことを証明せよ。

(1)　$5^n > 4n$　　　(2)　$n \geqq 3$ のとき　$3^n > 5n+1$

(1) (i) $n=1$ のとき

(左辺) $=5$，(右辺) $=4$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき

$5^k > 4k$ …① が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

(左辺) − (右辺) $= 5^{k+1} - 4(k+1)$

$= 5\cdot 5^k - 4(k+1) > 5\cdot 4k - 4(k+1)$

①より

$= 20k - 4k - 4 = 16k - 4$

k は自然数なので $16k - 4 > 0$

よって $n=k+1$ のとき (左辺) > (右辺) は成立

(i), (ii) から

すべての自然数 n について成立する

(2) (i) $n=3$ のとき

(左辺) $=3^3=27$，(右辺) $=5\cdot 3+1=16$

となり成立

(ii) $n=k$ のとき ($k \geqq 3$)

$3^k > 5k+1$ …① が成り立つと仮定する

$n=k+1$ のとき

(左辺) − (右辺) $= 3^{k+1} - 5(k+1) - 1$

$= 3\cdot 3^k - 5k - 10 > 3\cdot(5k+1) - 5k - 6$

①より

$= 10k - 3$

$k \geqq 3$ なので $10k - 3 > 0$

よって $n=k+1$ のとき (左辺) > (右辺) は成立

(i), (ii) から

$n \geqq 3$ の

すべての自然数 n について成立する

2 n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次のことを証明せよ。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2<\frac{(n+1)^3}{3}$$

(i) $n=1$ のとき

$(左辺)=1^2=1$，$(右辺)=\frac{(1+1)^3}{3}=\frac{8}{3}$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき

$1^2+2^2+\cdots+k^2<\frac{(k+1)^3}{3}$ …① が成り立つと仮定

$n=k+1$ のとき

$(右辺)-(左辺)=\frac{(k+2)^3}{3}-\{1^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\}$

$=\frac{(k+2)^3}{3}-(k+1)^2-(1^2+\cdots+k^2)$

①より　注目!!

$>\frac{(k+2)^3}{3}-(k+1)^2-\frac{(k+1)^3}{3}$

$=\frac{3k^2+9k+7}{3}-(k^2+2k+1)=k+\frac{4}{3}>0$

よって $n=k+1$ のときも成立

(i), (ii) から

すべての自然数 n について成立

3 $x<1$ で，n は自然数とする。数学的帰納法を用いて，次のことを証明せよ。

$$(1-x)^n\geqq 1-nx$$

(i) $n=1$ のとき

$(左辺)=1-x$，$(右辺)=1-x$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき　$(1-x)^k\geqq 1-kx$ …① が成り立つと仮定

$n=k+1$ のとき

$(左辺)-(右辺)=(1-x)^{k+1}-\{1-(k+1)x\}$

$=(1-x)(1-x)^k-1+(k+1)x$

①より

$\geqq(1-x)(1-kx)-1+(k+1)x$

$=1-kx-x+kx^2-1+kx+x$

$=kx^2\geqq 0$　よって $n=k+1$ のときも成立

(i), (ii) から　すべての自然数 n について成立

＜今日のふりかえり＞