$\boxed{1}$ 次のことが成り立つことを証明せよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき $2x^3+1 \geqq 3x^2$　　(2)　$x>1$ のとき $x^3-3x^2+6x-4>0$

(1) $f(x)=2x^3+1-3x^2$ とおく　　$f'(x)=0$ とすると

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$　　$x=0,\ 1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗

$f(x)$は $x \geqq 0$ のとき $x=1$ で最小値 0

すなわち，$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$

よって　$2x^3+1 \geqq 3x^2$ となる

(2) $f(x)=x^3-3x^2+6x-4$ とおく

$f'(x)=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3$

$f'(x)>0$ であるから $f(x)$ は常に単調に増加

また　$f(1)=1-3+6-4=0$

すなわち $x>1$ において $f(x)>f(1)=0$

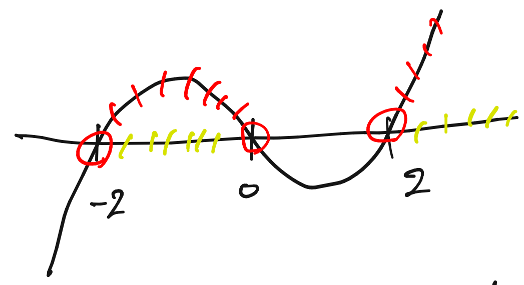
よって　$x^3-3x^2+6x-4>0$

$\boxed{2}$ 次の３次不等式を解け。

(1)　$x^3-4x>0$　　(2)　$x^3-x^2-3x+3<0$　　(3)　$x^3-3x-2 \geqq 0$

(1) $y=x^3-4x$ とおく

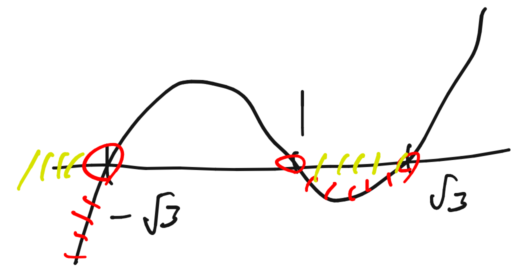
$y=x(x+2)(x-2)$



$-2<x<0,\ 2<x$

(2) $y=x^3-x^2-3x+3$ とおく

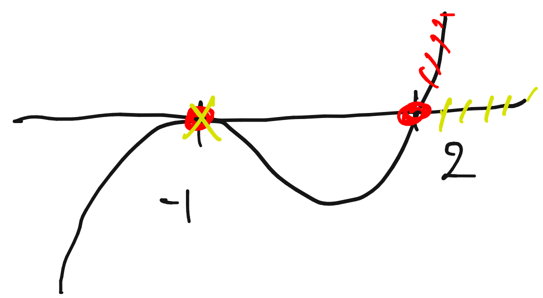
$y=(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$



$x<-\sqrt{3},\ 1<x<\sqrt{3}$

(3) $y=x^3-3x-2$ とおく

$y=(x+1)^2(x-2)$



$x=-1,\ 2 \leqq x$

3 $x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して不等式 $x^3 \geqq a(x^2 - a)$ が成り立つような実数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x) = x^3 - a(x^2 - a)$ とおく　　$f'(x) = 0$ とすると

$f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$　　$x = 0,\ \frac{2}{3}a$

(i) $\frac{2}{3}a \leqq 0$ すなわち $a \leqq 0$ のとき

$x \geqq 0$ において $f'(x) \geqq 0$ であるため $f(x)$ は常に単調に増加

よって $f(x)$ は $x = 0$ で最小，ここで $f(0) = a^2$

$f(0)$ は，$a \leqq 0$ において常に正となる

よって，$a \leqq 0$ のときは成立する

(ii) $\frac{2}{3}a > 0$ すなわち $a > 0$ のとき

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$x = \frac{2}{3}a$ のとき最小となる

$f\left(\frac{2}{3}a\right) \geqq 0$ となればよい

すなわち

$$\frac{8}{27}a^3 - a\left(\frac{4}{9}a^2 - a\right) \geqq 0$$

$$a^2\left(a - \frac{27}{4}\right) \leqq 0$$

$a^2 > 0$ であるから　$a - \frac{27}{4} \leqq 0$

$a > 0$ とあわせると　$0 < a \leqq \frac{27}{4}$

(i)，(ii) より　$a \leqq \frac{27}{4}$

4 a は定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$f(x) = -x^3 + 3ax \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

$f'(x) = -3x^2 + 3a$

(i) $a \leqq 0$ であれば $f'(x) \leqq 0$ なので，

$f(x)$ は単調に減少 つまり $f(0)$ が最大

(ii) $a > 0$ ならば $f'(x) = -3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$

[1] $0 < \sqrt{a} < 1$ すなわち $0 < a < 1$ のとき

$f(\sqrt{a})$ が最大

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

[2] $1 \leqq \sqrt{a}$ すなわち $1 \leqq a$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ で $f'(x) \geqq 0$ であるから $f(x)$ は単調に増加

$f(1)$ が最大

$a \leqq 0$ のとき $x = 0$ で最大値 0

(i)，(ii) より　$0 < a < 1$ のとき $x = \sqrt{a}$ で最大値 $2a\sqrt{a}$

$a \geqq 1$ のとき $x = 1$ で最大値 $3a - 1$