1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1)　$y=x^3-9x$　$(-3 \leqq x \leqq 3)$　　(2)　$y=x^3-6x^2+9x$　$(-1 \leqq x \leqq 2)$

(3)　$y=-x^3-3x^2+5$　$(-3 \leqq x \leqq 2)$

(1) $y'=3x^2-9=3(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

$y'=0$ とすると $x=\pm\sqrt{3}$

x	-3	…	$-\sqrt{3}$	…	$\sqrt{3}$	…	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$6\sqrt{3}$	↘	$-6\sqrt{3}$	↗	0

$x=-\sqrt{3}$ のとき 最大値 $6\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3}$ のとき 最小値 $-6\sqrt{3}$

(2) $y'=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると $x=1,\ 3$

x	-1	…	1	…	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-16	↗	4	↘	2

$x=1$ のとき 最大値 4

$x=-1$ のとき 最小値 -16

(3) $y'=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

$y'=0$ とすると、$x=0,\ -2$

x	-3	…	-2	…	0	…	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	5	↘	1	↗	5	↘	-15

$x=-3,\ 0$ のとき
最大値 5

$x=2$ のとき
最小値 -15

2 a，b は定数で，$a<0$ とする。関数 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ $(1 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 10，最小値が -2 になるように，定数 a，b の値を定めよ。

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0,\ 2$

$a<0$ なので

x	1	…	2	…	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2a+b$	↗	$-4a+b$	↘	b

$a<0$ なので、$-2a+b>b$

よって、$x=2$ のとき最大値、$x=3$ のとき最小値となる。

$-4a+b=10$，$b=-2$

$a=-3$，$b=-2$

これは $a<0$ をみたす

したがって

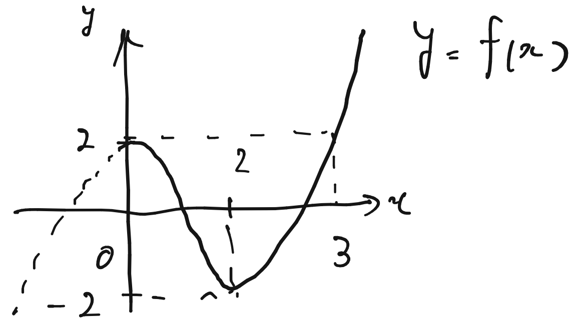
$a=-3$，$b=-2$

3　$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ $(0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.　$f'(x)=0$ とすると $x=0,2$

x	0	…	2	…
$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	2	↘	−2	↗



(1) (i) $0<a<2$ のとき　$x=a$ で最小値　a^3-3a^2+2

(ii) $2\leqq a$ のとき　$x=2$ で最小値　-2

(2) $f(x)=2$ とすると　$x^3-3x^2=0$,　$x=0,3$

(i) $0<a<3$ のとき　$x=0$ で最大値 2

(ii) $a=3$ のとき　$x=0,3$ で最大値 2

(iii) $a>3$ のとき　$x=a$ で最大値　a^3-3a^2+2

4　$k>0$ とする。関数 $f(x)=3x^3-k^2x+2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$f'(x)=9x^2-k^2=9\left(x^2-\frac{k^2}{9}\right)=9\left(x-\frac{k}{3}\right)\left(x+\frac{k}{3}\right)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm\frac{k}{3}$

(1) (i) $0<\frac{k}{3}<1$ すなわち $0<k<3$ のとき

x	0	…	$\frac{k}{3}$	…	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	2	↘		↗	$-k^2+5$

$x=\frac{k}{3}$ で最小値　$-\frac{2}{9}k^3+2$

(ii) $1\leqq\frac{k}{3}$ すなわち $k\geqq 3$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において $f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少。

よって　$x=1$ で最小値　$-k^2+5$

(2) $x\geqq 0$ において

x	0	…	$\frac{k}{3}$	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	2	↘		↗

$0\leqq x\leqq 1$ において最大値は $f(0)$ または $f(1)$

$f(0)-f(1)=2-(-k^2+5)=k^2-3$
$=(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})$

(i) $0<k<\sqrt{3}$ のとき　$f(0)<f(1)$
よって　$x=1$ のとき最大値　$-k^2+5$

(ii) $k=\sqrt{3}$ のとき　$f(0)=f(1)$
よって　$x=0,1$ のとき最大値 2

(iii) $\sqrt{3}<k$ のとき　$f(0)>f(1)$
よって　$x=0$ のとき最大値 2