

1 次の条件をすべて満たす2次関数  $f(x)$  を求めよ。

$f(2)=6, f'(0)=2, f'(1)=4$

$f(x) = ax^2 + bx + c$  とおく ( $a \neq 0$ )

$f'(x) = 2ax + b$

$f(2) = 6$  より

$4a + 2b + c = 6$

$f'(0) = 2$  より

$b = 2$

$f'(1) = 4$  より

$2a + b = 4$

これを解くと  $a = 1, b = 2, c = -2$

$f(x) = x^2 + 2x - 2$

2 (1) 関数  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x$  について、 $x = -2$  における微分係数を求めよ。

(2) 2次関数  $f(x)$  が次の条件を満たすとき、 $f(x)$  を求めよ。

$f(1) = -3, f'(1) = -1, f'(0) = 3$

(3) 2次関数  $f(x) = x^2 + ax + b$  が  $2f(x) = (x+1)f'(x) + 6$  を満たすとき、定数  $a, b$  の値を求めよ。

(1)  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 8$

$f'(-2) = 6 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) - 8$

$= 24 - 12 - 8$

$= 4$

(2)  $f(x) = ax^2 + bx + c$  とおく ( $a \neq 0$ )

$f'(x) = 2ax + b$

$f(1) = -3$  より  $a + b + c = -3$

$f'(1) = -1$  より  $2a + b = -1$

$f'(0) = 3$  より  $b = 3$

$a = -2, b = 3$

$c = -4$

$f(x) = -2x^2 + 3x - 4$

(3)  $f(x) = x^2 + ax + b$  とおく

$f'(x) = 2x + a$

$2(x^2 + ax + b) = (x+1)(2x+a) + b$

$2x^2 + 2ax + 2b = 2x^2 + (a+2)x + a + b$

これを  $x$  の1次方程式と見て

$\begin{cases} 2a = a+2 & a=2, b=4 \\ 2b = a+b \end{cases}$

$a=2, b=4$

3 (1) 2次関数  $f(x)$  が  $f'(0) = 1, f'(1) = 2$  を満たすとき、 $f'(2)$  の値を求めよ。

(2) 3次関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  が  $(x-2)f'(x) = 3f(x)$  を満たすとき、 $a, b, c$  の値を求めよ。

(1)  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) とおく。  $f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = 1$  より  $b = 1$   $f'(1) = 2$  より  $2a + b = 2$

$2a + 1 = 2, a = \frac{1}{2}$

よって

$f'(x) = x + 1$   $f'(2) = 2 + 1 = 3$   $f'(2) = 3$

(2)  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$  とおく

$(x-2)(3x^2 + 2ax + b) = 3(x^3 + ax^2 + bx + c)$

$3x^3 + (2a-6)x^2 + (b-4a)x - 2b = 3x^3 + 3ax^2 + 3bx + 3c$

これを  $x$  の1次方程式と見て

$\begin{cases} 2a-6 = 3a & b-4a = 3b, -2b = 3c \end{cases}$

$a = -6, b = 12, c = -8$

4  $x$  の整式  $f(x)$  が常に  $f(x) + x^2 f'(x) = kx^3 + k^2 x + 1$  を満たすとき、次の問いに答えよ。  
ただし、 $k$  は 0 でない定数である。

- (1) 整式  $f(x)$  を  $x$  の  $n$  次式とすると、 $n$  の値を求めよ。
- (2) 整式  $f(x)$  を求めよ。

(1)  $k \neq 0$  なら、左の次数は 3

~~$n=0$  のとき左の次数は 0 と右と一致は必ず不適~~

~~$n \geq 1$  のとき  $f'(x)$  は  $(n-1)$  次式で、 $x^2 f'(x)$  は~~

~~$(n+1)$  次式で、左の次数は  $n+1$~~

よって  $n+1 = 3$ ,  $n = 2$

(2)  $f(x)$  は 2 次式なら、 $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )

$f'(x) = 2ax + b$  等式に代入

$$(ax^2 + bx + c) + x^2(2ax + b) = kx^3 + k^2 x + 1$$

$$2ax^3 + (a+b)x^2 + bx + c = kx^3 + k^2 x + 1$$

この等式が常に成り立つことより

$$2a = k, \quad a + b = 0, \quad b = k^2, \quad c = 1$$

$$b = 4a^2 \quad a(1 + 4a) = 0$$

$$a + 4a^2 = 0 \quad (a \neq 0) \quad a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$

5 地上から真上に初速度 49 m/s で投げ上げられた物体の  $t$  秒後の高さ  $h$  は  $h = 49t - 4.9t^2$  (m) で与えられる。この運動について次のものを求めよ。ただし、 $v$  m/s は秒速  $v$  m を意味する。

- (1) 1 秒後から 2 秒後までの平均の速さ
- (2) 2 秒後の瞬間の速さ

(1) 
$$\frac{49 \cdot 2 - 4.9 \cdot 2^2 - (49 - 4.9)}{2 - 1} = \underline{\underline{34.3}}$$

(2) 
$$\frac{dh}{dt} = 49 - 2 \cdot 4.9t$$
  
$$= 49 - 9.8t$$

$t = 2$  のとき

$49 - 9.8 \times 2 = \underline{\underline{29.4}}$