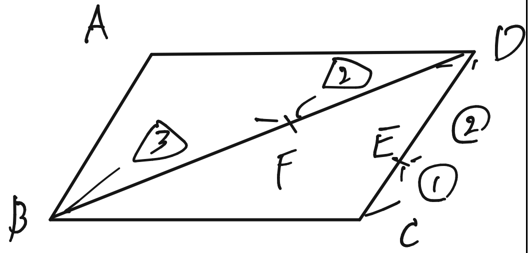
1 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：2 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2\vec{b}+3\vec{d}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{1+2}=\frac{2(\vec{b}+\vec{d})+\vec{d}}{3}=\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}$$

よって $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$

したがって 3点 A，F，E は同一直線上にある

2 平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 3：1 に内分する点を E，対角線 BD を 4：1 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}}{4+1}=\frac{\vec{b}+4\vec{d}}{5}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{3+1}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+3\vec{d}}{4}=\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}$$

よって $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AE}$

したがって 3点 A，F，E は同一直線上にある

3 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}-3\vec{b}$，$\overrightarrow{OB}=3\vec{a}-5\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=4\vec{a}-6\vec{b}$ とする。ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないものとする。

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 3 点 A，B，C は一直線上にあることを証明せよ。

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{a}-5\vec{b}-(\vec{a}-3\vec{b})$

$=2\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=4\vec{a}-6\vec{b}-(\vec{a}-3\vec{b})$

$=3\vec{a}-3\vec{b}$

(2) (1)より $\overrightarrow{AB}=2(\vec{a}-\vec{b})$

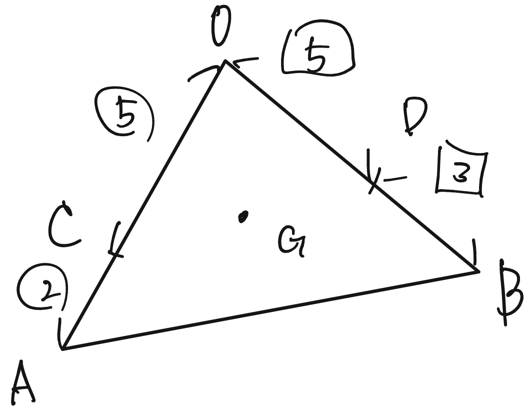
$\overrightarrow{AC}=3(\vec{a}-\vec{b})$

すなわち $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

よって 3点 A，B，C は同一直線上にある

4　△OABにおいて，辺OAを5：2に内分する点をC，辺OBを5：3に内分する点をDとする。△OABの重心をGとするとき，3点C，G，Dは一直線上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく



$$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{7}\vec{a},\quad \overrightarrow{OD}=\frac{5}{8}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\times\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

$$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}-\frac{5}{7}\vec{a}=\frac{-8\vec{a}+7\vec{b}}{21}$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\frac{5}{8}\vec{b}-\frac{5}{7}\vec{a}=\frac{5}{56}(-8\vec{a}+7\vec{b})$$

$$=\frac{15}{8}\times\frac{-8\vec{a}+7\vec{b}}{21}$$

よって

$\overrightarrow{CD}=\frac{15}{8}\overrightarrow{CG}$　したがって

3点 C, G, D は同一直線上にある

5　△ABCにおいて，辺BCを2：3に内分する点をD，辺CAを3：1に内分する点をEとする。△ABCの重心をGとするとき，3点D，G，Eは一直線上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}=\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5}$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\vec{c},\quad \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5}=-\frac{4\vec{b}+\vec{c}}{15}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{5}=-\frac{12\vec{b}+3\vec{c}}{20}$$

$$=\frac{9}{4}\times\left(-\frac{4\vec{b}+\vec{c}}{15}\right)$$

よって

$\overrightarrow{DE}=\frac{9}{4}\overrightarrow{DG}$　したがって

3点 D, G, E は同一直線上にある。

<今日のふりかえり>