1 次の曲線上の与えられた点における，曲線の接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=x^2-3x+2$，(1，0)　　(2)　$y=-2x^2+4x-1$，(0，−1)

(3)　$y=x^3+4$，(−2，−4)　　(4)　$y=5x-x^3$，(2，2)

(1) $f(x)=x^2-3x+2$ とおく

$f'(x)=2x-3$

$f'(1)=2-3=-1$

$y-0=-1\times(x-1)$

$y=-x+1$

(2) $f(x)=-2x^2+4x-1$ とおく

$f'(x)=-4x+4$，$f'(0)=4$

$y-(-1)=4(x-0)$

$y=4x-1$

(3) $f(x)=x^3+4$ とおく

$f'(x)=3x^2$

$f'(-2)=3\cdot4=12$

$y-(-4)=12\{x-(-2)\}$

$y=12x+20$

(4) $f(x)=5x-x^3$ とおく

$f'(x)=5-3x^2$

$f'(2)=5-3\cdot4=-7$

$y-2=-7(x-2)$

$y=-7x+16$

2 次の曲線に，与えられた点から引いた接線の方程式と，接点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+3x+4$　(0，0)　　(2)　$y=x^2-x+3$　(1，−1)

(3)　$y=x^3+2$　(0，4)

(1) $f(x)=x^2+3x+4$ とおく．$f'(x)=2x+3$

接点の座標 $(a,\ a^2+3a+4)$ とおくと

接線の方程式 $y-(a^2+3a+4)=(2a+3)(x-a)$

すなわち $y=(2a+3)x-a^2+4$

この直線が (0,0) を通るので，$0=(2a+3)\times0-a^2+4$

$a^2=4$，$a=\pm2$

$a=2$ のとき

接点 (2，14)

接線の方程式 $y=7x$

$a=-2$ のとき

接点 (−2，2)，接線の方程式 $y=-x$

(2) $y'=2x-1$　接点の座標 $(a,\ a^2-a+3)$ とおくと

接線の方程式 $y-(a^2-a+3)=(2a-1)(x-a)$

$y=(2a-1)x-a^2+3$

この直線が (1，−1) を通るので．

$-1=(2a-1)-a^2+3$

$a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$

$a=3,\ -1$

$a=-1$ のとき 接点 (−1，5)

接線の方程式 $y=-3x+2$

$a=3$ のとき 接点 (3，9)

接線の方程式 $y=5x-6$

(3) $y'=3x^2$

接点の座標 $(a,\ a^3+2)$ とおくと

接線の方程式 $y-(a^3+2)=3a^2(x-a)$

$y=3a^2x-2a^3+2$

この直線が (0，4) を通るので

$4=-2a^3+2$

$a^3+1=0$

$(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^2-a+1=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ より $a=-1$

$a=-1$ のとき 接点 (−1，1)

接線の方程式 $y=3x+4$

3 曲線 $y=x^3+3x^2-6$ について，傾きが 9 である接線の方程式を求めよ。

$y'=3x^2+6x$

接点 $(a,\ a^3+3a^2-6)$ とおくと

接線の傾きが 9 なので，

$3a^2+6a=9$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

$a=1,\ -3$

接点の座標

$(1,\ -2),\ (-3,\ -6)$

接線の方程式は

$y-(-2)=9(x-1)$

$y-(-6)=9(x+3)$

すなわち

$y=9x-11,\ y=9x+21$

4 曲線 $y=-x^3+4x$ 上の点 $(-2,\ 0)$ における接線が，この曲線と交わるもう 1 つの点の x 座標を求めよ。

$y'=-3x^2+4$

$x=-2$ のとき $y'=-8$

点 $(-2,\ 0)$ における

接線の方程式は

$y-0=-8(x+2)$

$y=-8x-16$

$y=-x^3+4x$ と $y=-8x-16$

の交点を求めると

$-x^3+4x=-8x-16$

$x^3-12x-16=0$

$(x+2)^2(x-4)=0$

$x=4$

x 座標は 4

5 2 つの曲線 $y=x^2+2$，$y=x^2+ax+3$ の交点を P とする。P におけるそれぞれの曲線の接線が垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

$f(x)=x^2+2$，$g(x)=x^2+ax+3$ とおく。

$f'(x)=2x$　　$g'(x)=2x+a$

また，点 P の x 座標 p とする。

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は点 P で交わるので，

$f(p)=g(p)$ つまり $p^2+2=p^2+ap+3$

$ap=-1$ …①

点 P において $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接線が垂直なので，

$f'(p)\times g'(p)=-1$ つまり $2p\times(2p+a)=-1$

$4p^2+2ap=-1$ …②

②に①を代入

$4p^2+2\cdot(-1)=-1$

$4p^2=1$

$p^2=\frac{1}{4}$

$p=\pm\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2}$ のとき $a=-2$

$p=-\frac{1}{2}$ のとき $a=2$

以上より $a=\pm 2$