1　導関数の定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$y=-3x+4$　(2)　$y=x^2-3x+5$　(3)　$y=x^3-3x$

(4)　$y=\dfrac{1}{x}$　(5)　$y=-3x^4+2x^3-5x^2+7$

(1)

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{-3(x+h)+4-(-3x+4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h} = \lim_{h\to 0}(-3) = -3$$

(2)

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-3(x+h)+5-(x^2-3x+5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h+5-(x^2-3x+5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2-3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h-3) = 2x-3$$

(3)

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-3(x+h)-(x^3-3x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-3x-3h-x^3+3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3-3h}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-3) = 3x^2-3$$

(4)

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{bc}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

(5)

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{-3(x+h)^4+2(x+h)^3-5(x+h)^2+7-(-3x^4+2x^3-5x^2+7)}{h}$$

⋮

$$= 12x^2-2x-3$$

$$y' = 12x^2-2x-3$$

2 導関数の定義にしたがって，$y=x^n$ の導関数を求めよ。また、$y=c$（c は定数）の導関数も求めよ。

$y=x^n$

二項定理

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+{}_nC_1x^{n-1}\cdot h+\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{{}_nC_1x^{n-1}\cdot h+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-1}+h^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left({}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}\cdot h+\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1}\right)$$

$$={}_nC_1x^{n-1}=nx^{n-1}$$

$y=x^n$ のとき $\underline{y'=nx^{n-1}}$

$y=c$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}$$

$$=\underline{\underline{0}}$$

$y=c$ のとき $\underline{\underline{y'=0}}$

＜まとめ＞

関数 x^n について $(x^n)'=nx^{n-1}$

定数関数 c について $(c)'=0$