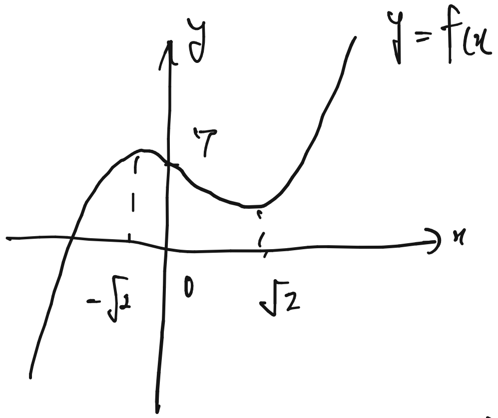
$\boxed{1}$ 次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3-6x+7=0$　　　(2)　$x^3+4x^2+6x-1=0$

(1) $y=x^3-6x+7$ とおくと　　$y'=0$ とすると

$y'=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$　　$x=\pm\sqrt{2}$

x	…	$-\sqrt{2}$	…	$\sqrt{2}$	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	$7+4\sqrt{2}$	↘	$7-4\sqrt{2}$	↗



$7-4\sqrt{2}>0$

このグラフとx軸の共有点 1個　すなわち、方程式の異なる実数解

1個

(2) $y=x^3+4x^2+6x-1$ とおく

$y'=3x^2+8x+6$　　$y'>0$ なので

$=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$　　yは常に単調に増加

また、$x=0$ のとき $y=-1$

$x=1$ のとき $y=10$ より

$0<x<1$ において x軸と1回交わる

すなわち 方程式の異なる実数解

1個

$\boxed{2}$ 3次方程式 $x^3-12x-a=0$ が異なる3個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

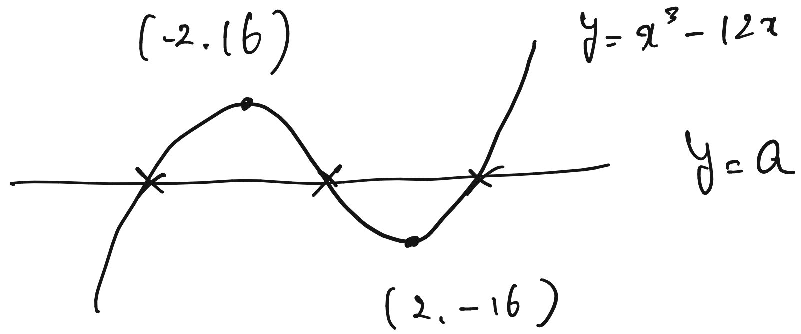
$x^3-12x=a \iff y=x^3-12x$ と $y=a$ の共有点を考える.

$y=x^3-12x$

$y'=3x^2-12$

$=3(x+2)(x-2)$

x	…	-2	…	2	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	16	↘	-16	↗



$-16<a<16$ のとき $y=a$ と $y=x^3-12x$ は 3点で共有点をもつ

すなわち $x^3-12x-a=0$ は 異なる実数解を3個もつ

よって $-16<a<16$

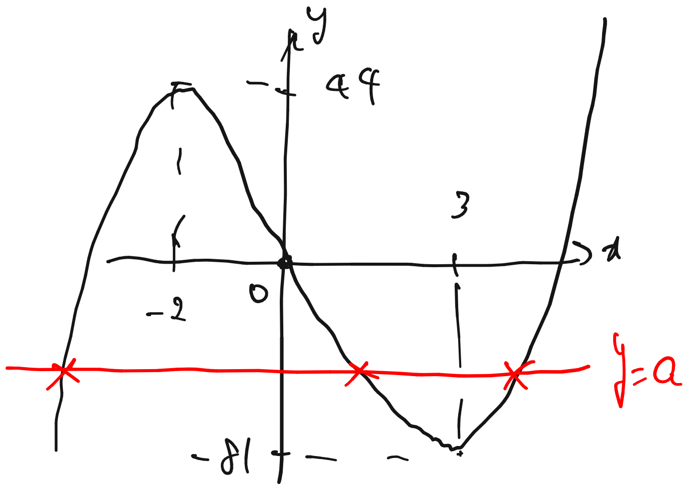
$\boxed{3}$ 方程式 $2x^3-3x^2-36x=a$ が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$y=2x^3-3x^2-36x$ $y=a$ の共有点を考える

$y'=6x^2-6x-36$ $y'=0$ とすると $x=-2, 3$

$=6(x+2)(x-3)$

x	…	-2	…	3	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	44	↘	-81	↗



$-81<a<0$

$\boxed{4}$ 曲線 $y=x^3-x$ と直線 $y=2x+a$ が異なる 3 点を共有するとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$x^3-x=2x+a$

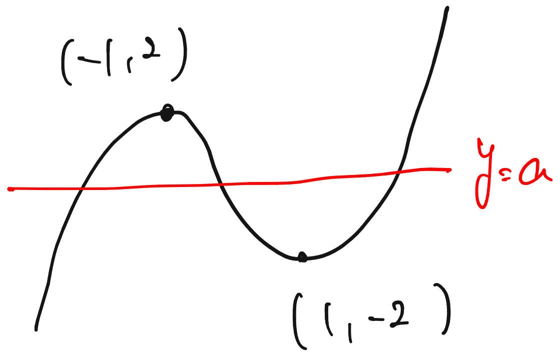
$x^3-3x=a$

すなわち $y=x^3-3x$ と $y=a$ の共有点を考えればよい

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると $x=\pm1$

x	…	-1	…	1	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗



$-2<a<2$

$\boxed{5}$ 方程式 $x^3-3ax+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^3-3ax+a$ とおく ☆ $y=f(x)$ が極値をもち，(極大値)×(極小値)<0 となればよい。

$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$

$f(x)$ が極値をもつには $f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつことなので

$a>0$ であればよい。このとき $f'(x)=0$ から $x=\pm\sqrt{a}$

x	…	$-\sqrt{a}$	…	$\sqrt{a}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(-\sqrt{a})\times f(\sqrt{a})<0$

$a(2\sqrt{a}+1)\times a(-2\sqrt{a}+1)<0$

$a^2(1-4a)<0$

$a^2>0$ より $1-4a<0$

$a>\frac{1}{4}$

以上より $a>\frac{1}{4}$