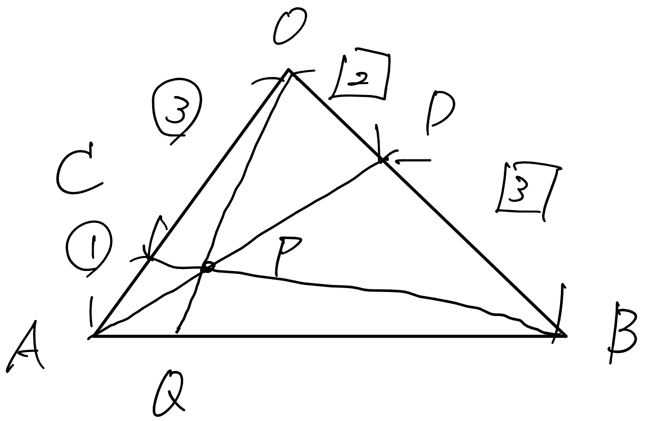
1－16　図形とベクトル③

[1] △OABにおいて，辺OAを3：1に内分する点をC，辺OBを2：3に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。また、直線OPと線分ABの交点をQとする。このとき、AP:PD、BP:PC、OP:PQ、AQ:QBを求めよ。



メネラウスの定理より

$$\frac{CO}{AC}\times\frac{BD}{OB}\times\frac{PA}{DP}=1$$

$$\frac{3}{1}\times\frac{3}{5}\times\frac{PA}{DP}=1$$

$$\frac{PA}{DP}=\frac{5}{9}$$

AP : PD = 5 : 9

メネラウスの定理より

$$\frac{DO}{BD}\times\frac{AC}{OA}\times\frac{PB}{CP}=1$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{PB}{CP}=1$$

$$\frac{PB}{CP}=\frac{6}{1}$$

BP : PC = 6 : 1

チェバの定理より

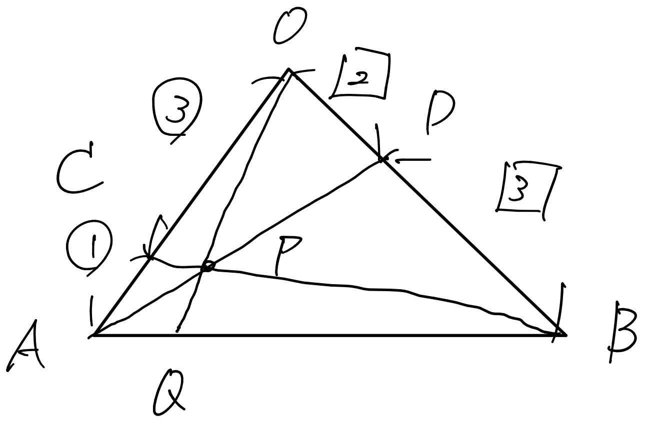
$$\frac{CA}{OC}\times\frac{QB}{AQ}\times\frac{DO}{BD}=1$$

$$\frac{QB}{AQ}=\frac{9}{2}$$

AQ : QB = 2 : 9

2 △OABにおいて，辺OAを3：1に内分する点をC，辺OBを2：3に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

〈方針〉
同一直線で立式する



(解) 3点A, P, Dは同一直線上にあるので、

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD}$ (kは実数)とおく

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OP} = (1-k)\vec{a} + k\cdot\frac{2}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{OP} = (1-k)\vec{a} + \frac{2}{5}k\vec{b}$ …①

3点B, P, Cは同一直線上なので、

$\overrightarrow{BP} = l\overrightarrow{BC}$ (lは実数)とおく

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB} = l(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OP} = l\overrightarrow{OC} + (1-l)\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OP} = l\cdot\frac{3}{4}\vec{a} + (1-l)\vec{b}$

$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}l\vec{a} + (1-l)\vec{b}$ …②

①, ②において、$\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ なので

$$\begin{cases} 1-k = \frac{3}{4}l \\ \frac{2}{5}k = 1-l \end{cases}$$

これを解くと、$k=\frac{5}{14}$, $l=\frac{6}{7}$

よって $\overrightarrow{OP} = \frac{9}{14}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$

3 △OABにおいて，辺OAを3：1に内分する点をC，辺OBを2：3に内分する点をDとし，線分ADと線分BCの交点をPとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。問2の解答を自分で再現せよ。また、OP:PQ、AQ:QBを求めよ。

$\boxed{2}$ より

$\overrightarrow{OP} = \frac{9}{14}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$

$= \frac{9\vec{a}+2\vec{b}}{14}$

$= \frac{11}{14} \times \frac{9\vec{a}+2\vec{b}}{11}$

AB上の点Qとおくと AQ : QB = 2 : 9 である。

また、$\overrightarrow{OP} = \frac{11}{14}\overrightarrow{OQ}$

よって

OP : PQ = 11 : 3