1 2直線 $\sqrt{3}x+y-2=0$，$\sqrt{3}x-y-4=0$ のなす鋭角を求めよ。

(解1) $y=-\sqrt{3}x+2$, $y=\sqrt{3}x-4$

の方向ベクトルをそれぞれ $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ とすると

$\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{p_2}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ とおける

$\vec{p_1}$ と $\vec{p_2}$ のなす角 θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{1-3}{\sqrt{1+3}\sqrt{1+3}}=-\frac{1}{2},\quad \theta=120^\circ$$

よって2直線のなす鋭角は 60°

(解2) 2直線の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ とすると

$\vec{n_1}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ とおける

$\vec{n_1}$ と $\vec{n_2}$ のなす角 θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると.

$$\cos\theta=\frac{3-1}{\sqrt{3+1}\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2},\quad \theta=60^\circ$$

60°

2 法線ベクトルを利用して，2直線 $\sqrt{3}x+y+2=0$，$-\sqrt{3}x+y-5=0$ のなす鋭角 α を求めよ。

2直線の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ とおく

$\vec{n_1}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n_2}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ とおける

$\vec{n_1}$ と $\vec{n_2}$ のなす角 θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とおく

$$\cos\theta=\frac{-3+1}{\sqrt{3+1}\sqrt{3+1}}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\theta=120^\circ$

求める鋭角 $\alpha=60^\circ$

3 (1)　点 A(5, −1) を通り，$\vec{n}=(1,\ -3)$ に垂直な直線の方程式を，ベクトルを用いて求めよ。

(2)　2 直線 $2x-4y+11=0$，$x+3y-12=0$ のなす鋭角 α を求めよ。

(1) 点 $P(x, y)$ とおくと

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ または $\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ より

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$　$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix} x-5 \\ y+1 \end{pmatrix}$，$\vec{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

より

$$(x-5)\times 1+(y+1)\times(-3)=0$$

$$x-3y-8=0$$

(2) 2直線の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$ とすると

$\vec{n_1}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$，$\vec{n_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおける

$\vec{n_1}$ と $\vec{n_2}$ のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{2-12}{\sqrt{4+16}\sqrt{1+9}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \theta=135^\circ$$

よって なす鋭角 $\alpha=45^\circ$

4 ベクトル $(-1,\ \sqrt{3})$ に垂直で，原点 O からの距離が 4 である直線の方程式を求めよ。

直線上の任意の点 $P(x, y)$ とする

また，原点から直線におろした垂線 OH とすると

直線のベクトル方程式は，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HP}=0$

また，$\vec{n}=\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ とすると，$\overrightarrow{OH} \parallel \vec{n}$ であるから

$\overrightarrow{OH}=k\vec{n}$ （k は定数）とおける．

よって　$\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix} -k \\ \sqrt{3}k \end{pmatrix}$

ここで，$|\overrightarrow{OH}|=4$ なので，$k^2+3k^2=16$

$k=\pm 2$

(i) $k=2$ のとき

$\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$　$\overrightarrow{HP}=\begin{pmatrix} x+2 \\ y-2\sqrt{3} \end{pmatrix}$

よって　$-2(x+2)+2\sqrt{3}(y-2\sqrt{3})=0$

$x-\sqrt{3}y+8=0$

(ii) $k=-2$ のとき

同様に　$x-\sqrt{3}y-8=0$

(i)，(ii) より

$x-\sqrt{3}y+8=0$

$x-\sqrt{3}y-8=0$