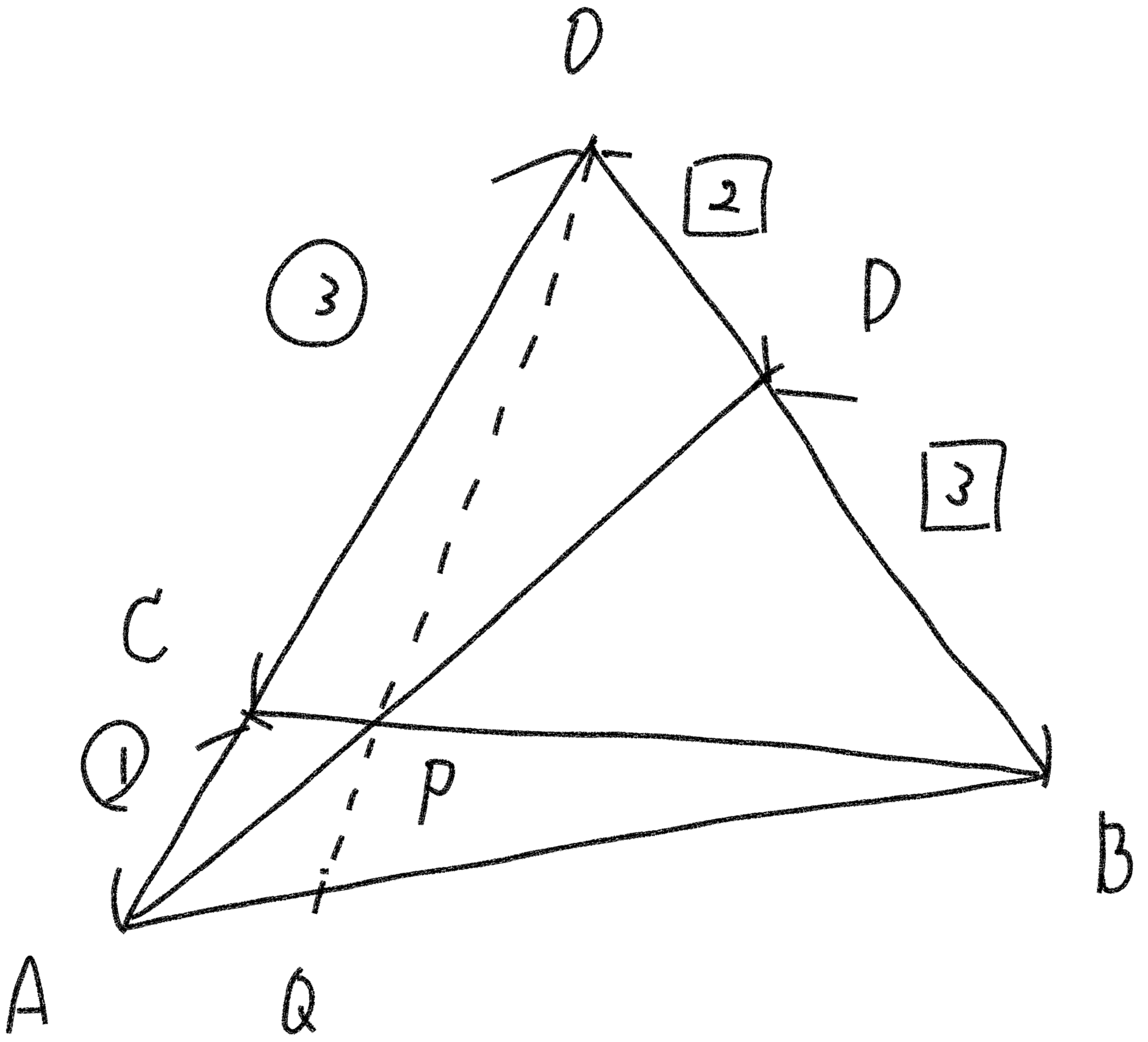
# 数学B
# 第1章　平面上のベクトル
# 図形とベクトル③

△OAB において，辺 OA を 3 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 2 : 3 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。また、直線OPと線分ABの交点をQとする。このとき、AP:PD、BP:PC、OP:PQ、AQ:QBを求めよ。



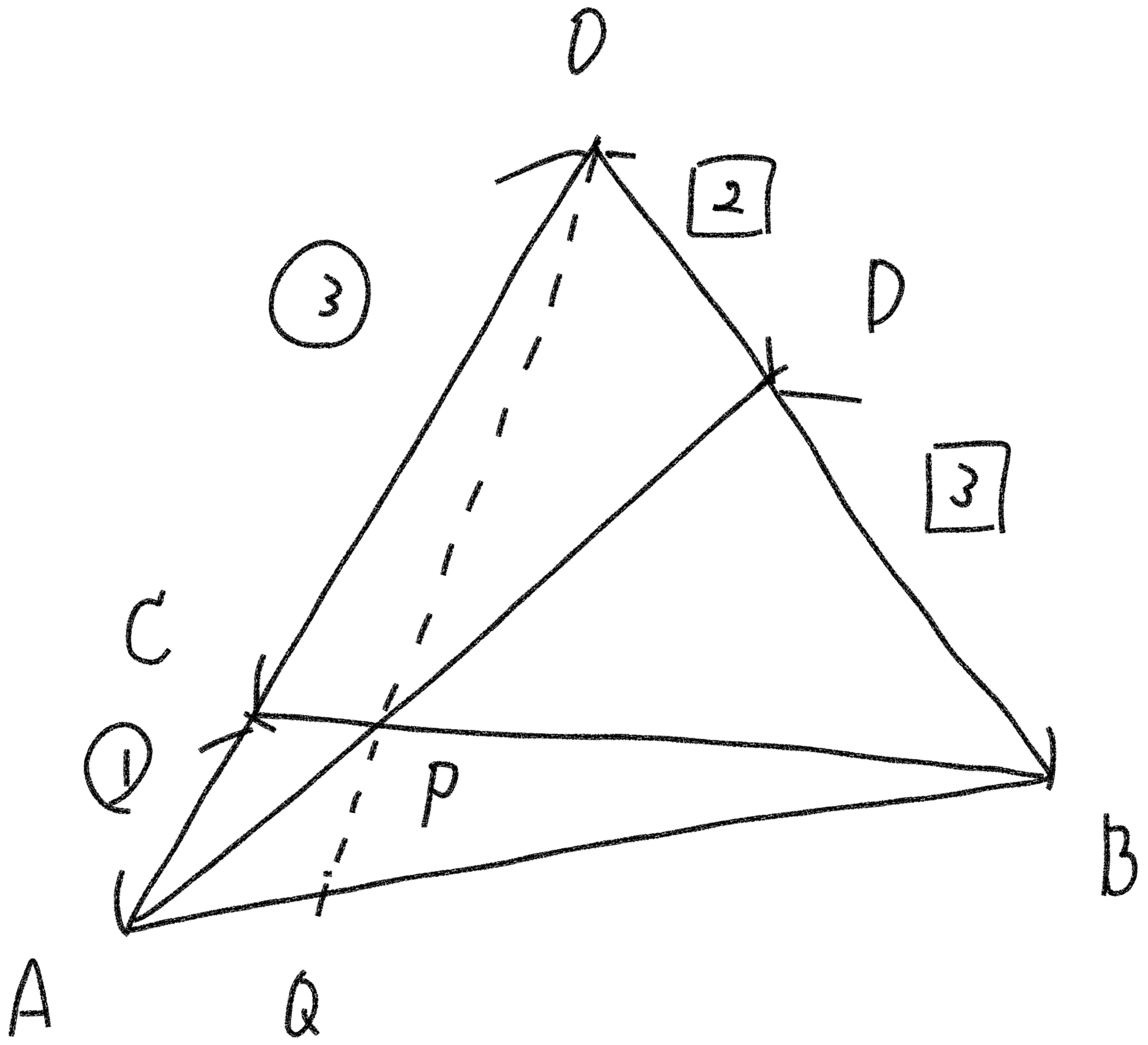

〈 方針 〉

① チェバ・メネラウスの定理

② ベクトル

⇓

★重要★




$AP : PD = k : 1-k$
$BP : PC = s : 1-s$ とおく

△OAD に注目すると.

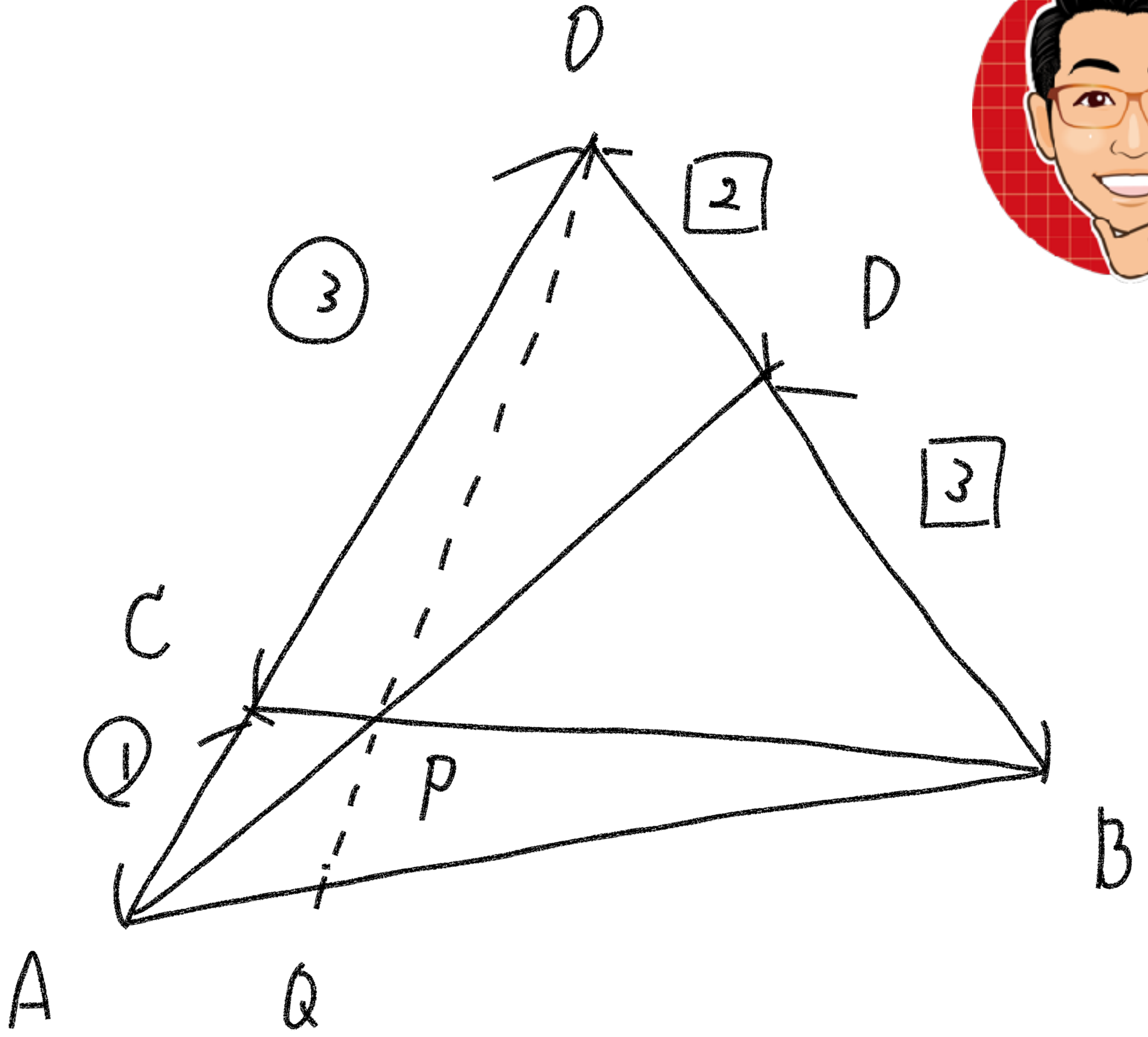
$$\overrightarrow{OP} = \frac{(1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}}{k + (1-k)} = (1-k)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}k\overrightarrow{OB}$$

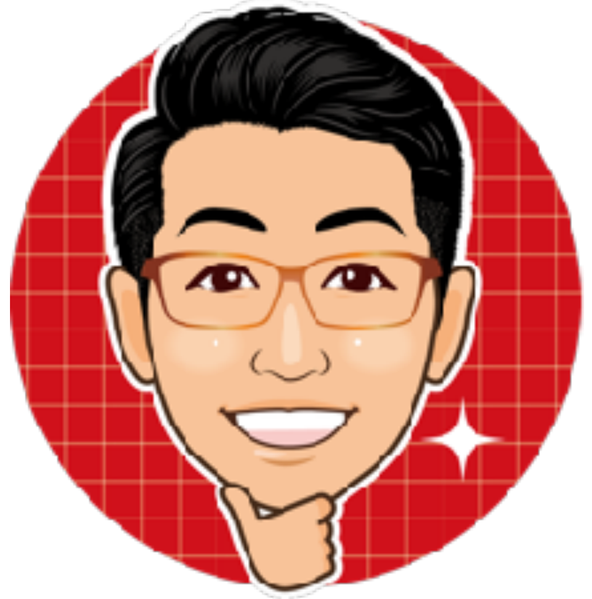
…①

△OCB に注目すると.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s\overrightarrow{OC} + (1-s)\overrightarrow{OB}}{(1-s) + s} = \frac{3}{4}s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB}$$

…②



①、②において、

$\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$、$\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$、$\overrightarrow{OA} \not\parallel \overrightarrow{OB}$ なので、

$$1-k = \frac{3}{4}s, \quad \frac{2}{5}k = 1-s$$

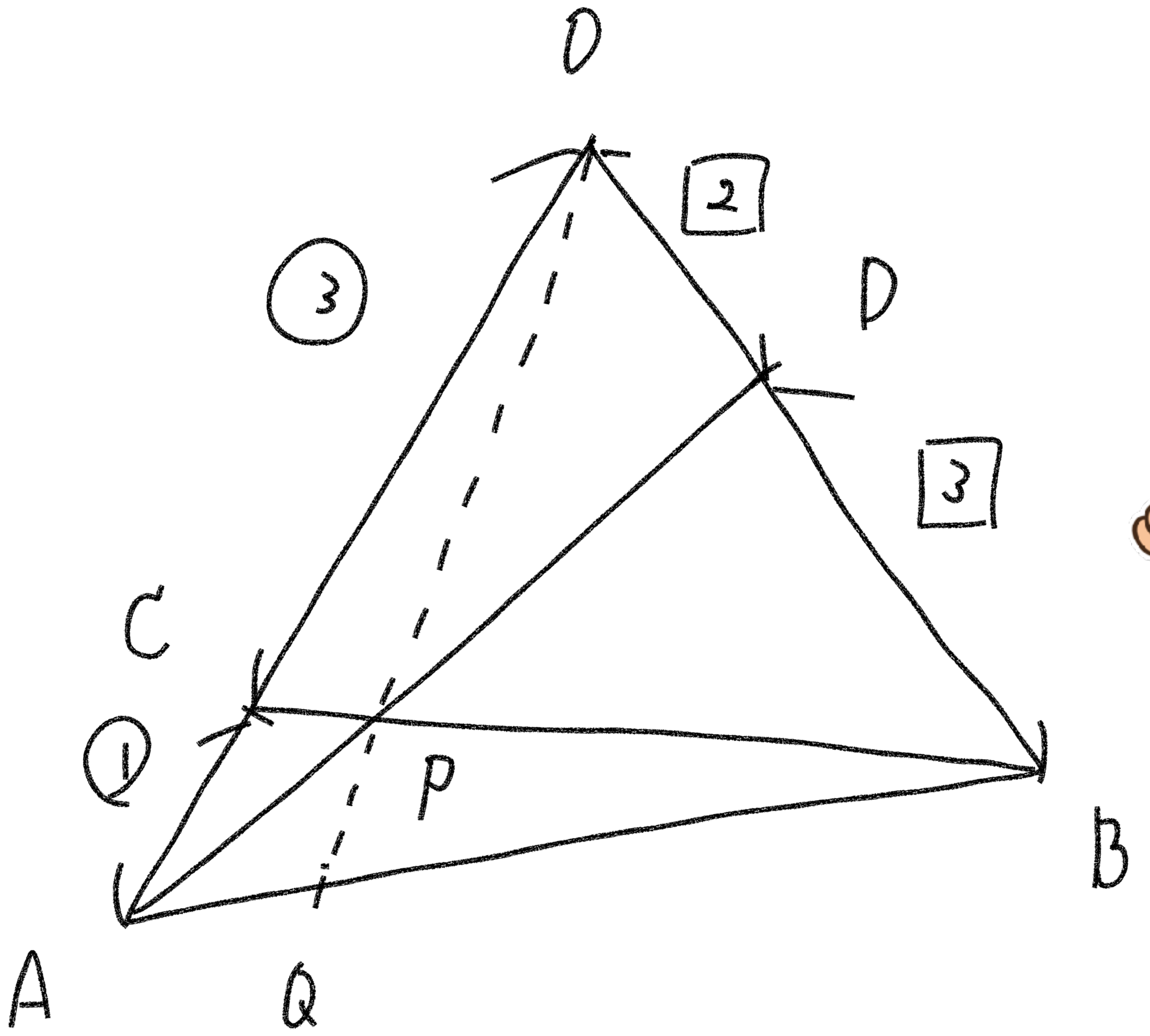
これを解くと、

$$k = \frac{5}{14}, \quad s = \frac{6}{7}$$

よって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{9}{14}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{OB}$$

$AP : PD = 5 : 9$, $BP : PC = 6 : 1$




また、$\overrightarrow{OP} = \frac{9}{14}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{OB}$ より

$$\overrightarrow{OP} = \frac{9\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{14}$$

$$= \frac{11}{14} \times \frac{9\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{11}$$

よって

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{9\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{11}, \quad \overrightarrow{OP} = \frac{11}{14}\overrightarrow{OQ}$$

となる。

以上より

$AQ : QB = 2 : 9, \quad OP : PQ = 11 : 3$