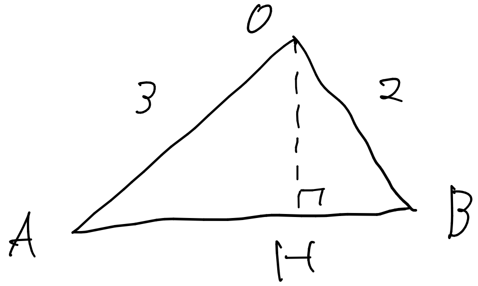
1　OA＝3，OB＝2，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ である鋭角三角形 OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

＜方針＞
- 点Hはどこにある？ → $\overrightarrow{OH}$ の立式
- 点Hが満たす条件は？ → 計算式の組立



点HはAB上にあるので

$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$ （kは実数）

$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OH} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ より

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$

$\{(1-k)\vec{a} + k\vec{b}\}\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = 0$

$(1-k)\vec{a}\cdot\vec{b} - (1-k)|\vec{a}|^2 + k|\vec{b}|^2 - k\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

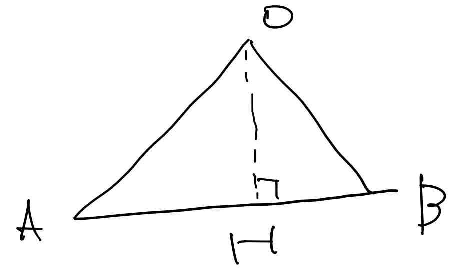
$2(1-k) - 9(1-k) + 4k - 2k = 0$

$9k = 7$

$k = \frac{7}{9}$

$\overrightarrow{OH} = \frac{2}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{7}{9}\overrightarrow{OB}$

2　OA＝5，OB＝3，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ である鋭角三角形 OAB において，点 O から辺 AB へ垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



点HはAB上にあるので

$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$ （kは実数）

$\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OH} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ より

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\{(1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}\}\cdot(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$

$(1-k)\vec{a}\cdot\vec{b} + k|\vec{b}|^2 - (1-k)|\vec{a}|^2 - k\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

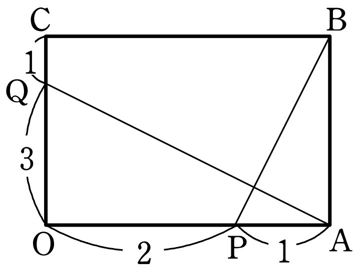
$4(1-k) + 9k - (1-k)\cdot 25 - 4k = 0$

$26k = 21$

$k = \frac{21}{26}$

$\overrightarrow{OH} = \frac{5}{26}\vec{a} + \frac{21}{26}\vec{b}$

3　OA＝6，OC＝4 である長方形 OABC において，辺 OA 上に OP：PA＝2：1 となる点 P，辺 OC 上に OQ：QC＝3：1 となる点 Q をとる。このとき，PB⊥QA であることを証明せよ。



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$

$= \vec{a} + \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}$

$= \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}$

$= \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{QA} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{c}\right)$

$= \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{3}{4}|\vec{c}|^2$

$= \frac{1}{3} \times 6^2 - 0 + 0 - \frac{3}{4} \times 4^2$

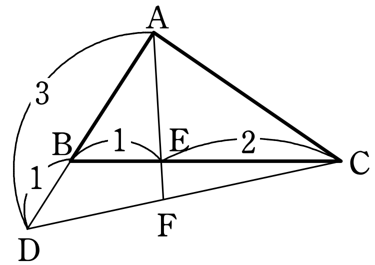
$= 12 - 12 = 0$

$\overrightarrow{PB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{QA} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{QA} = 0$ より

$\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{QA}$

[よって]　$PB \perp QA$

4　△ABC において，辺 AB を 3：1 に外分する点を D，辺 BC を 1：2 に内分する点を E とし，直線 AE と直線 CD の交点を F とする。
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



3点A, E, Fは同一直線上にあるので

$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$ （kは実数）

$= k \cdot \frac{2\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AC}}{1+2}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c}$ …①

3点C, F, Dは同一直線上にあるので

$\overrightarrow{CF} = l\overrightarrow{CD}$ （lは実数）

$\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = l(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AF} = l\overrightarrow{AD} + (1-l)\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}l\vec{b} + (1-l)\vec{c}$ …②

①，②において

$\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \not\parallel \vec{c}$ より

$$\begin{cases} \frac{2}{3}k = \frac{3}{2}l \\ \frac{1}{3}k = (1-l) \end{cases}$$

これを解いて

$l = \frac{4}{7}$, $k = \frac{9}{7}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{6}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$

<今日のふりかえり>