テーマ：

微分係数と微分可能

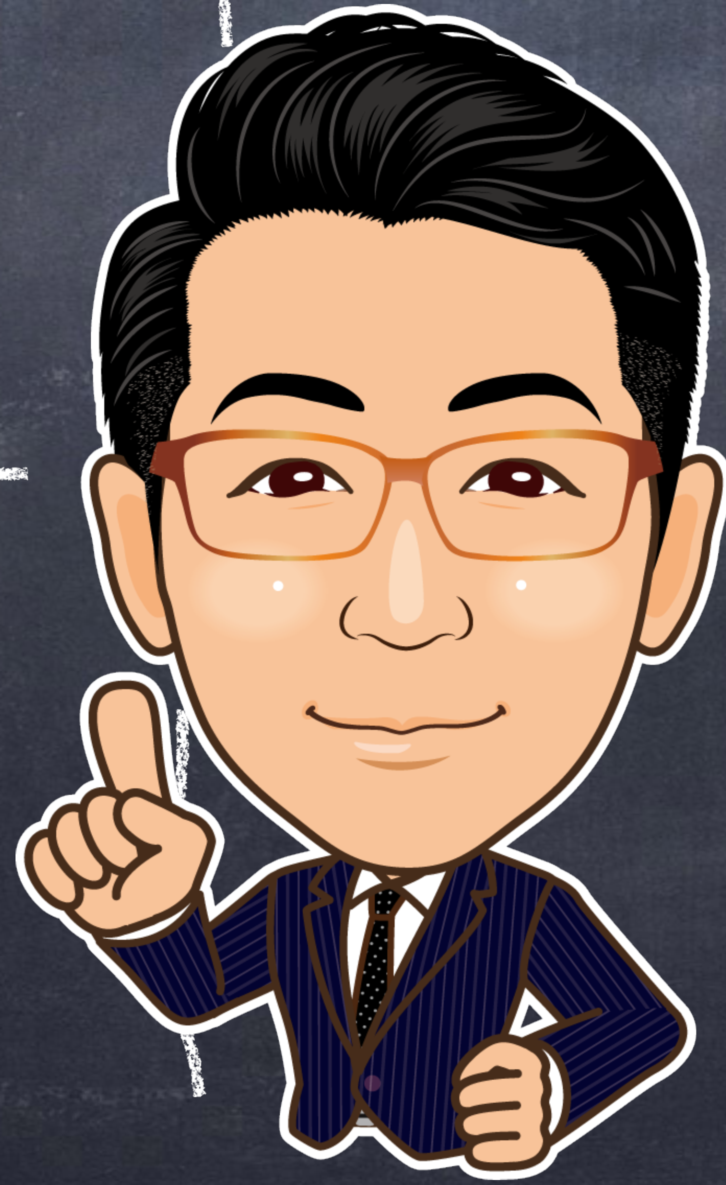
〈微分係数〉

$f(x)$ の $x=a$ における

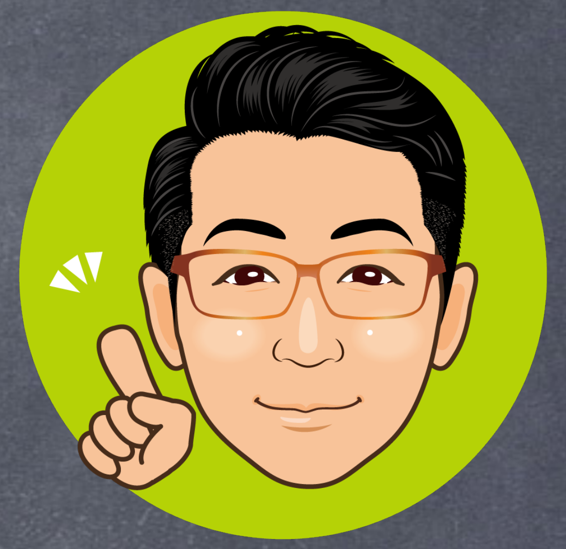
微分係数 $f'(a)$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



(ex) $f(x)=\sqrt{x}$, $x=3$ における微分係数



$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$$

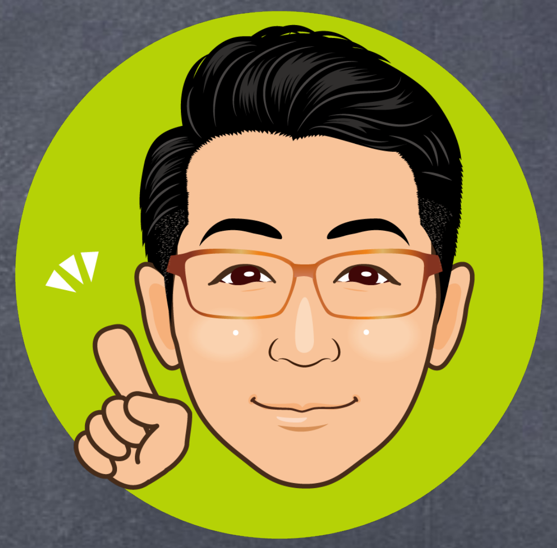
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}\times\frac{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3+h-3}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{3}}}}$$

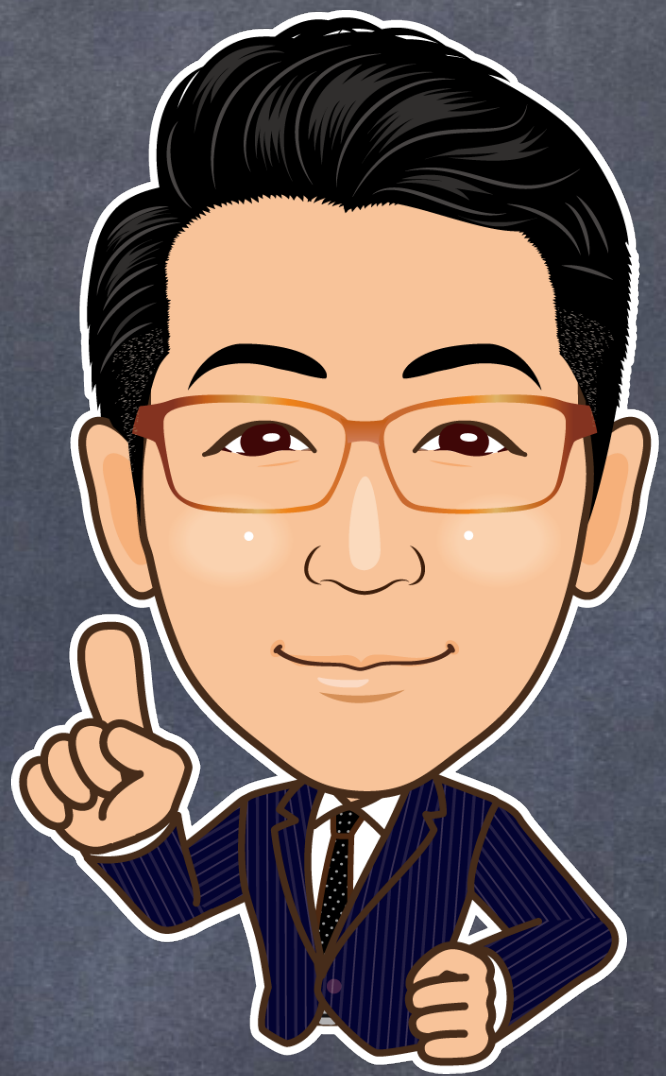
〈微分可能と連続〉

極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在 $\iff$ $f(x)$ は $x=a$ で微分可能



$\Downarrow$

$x=a$ で連続



逆に、

$x=a$ で連続 $\Rightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で微分可能

とは 限らない!!

f(x) が x=a で微分可能 ⇒ x=a で連続

(証) f(x) が x=a で微分可能なので

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ である.}$$

分数型の $\frac{\square}{0}$ で 極限値が存在する

したがって

$\lim_{x \to a} (x-a) = 0$ なので $\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$ である.

すなわち $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

したがって 関数 f(x) は x=a で連続である.

$f(x)=|x|$ について.

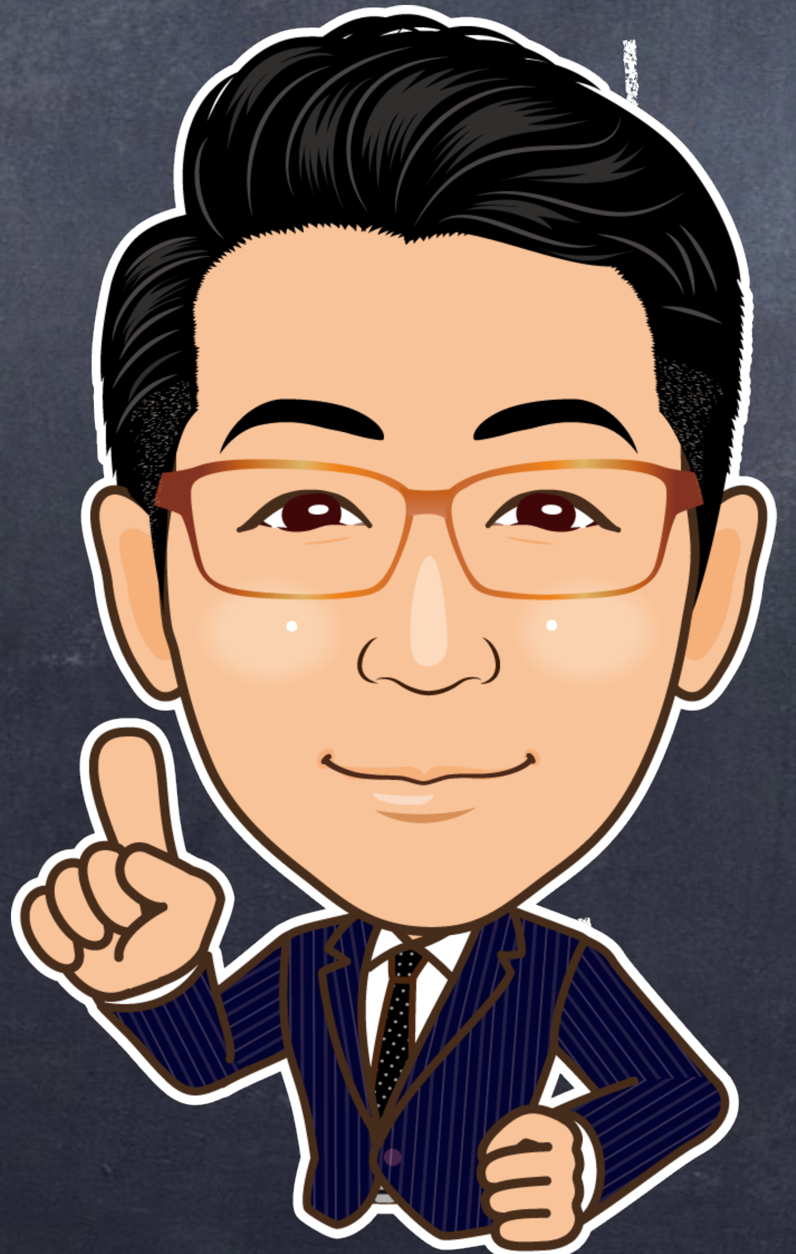
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $f(0)=0$ より

$f(x)$ は $x=0$ で連続である.

ここで.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$



$$\lim_{h\to +0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h}{h}=-1$$

したがって

$h\to 0$ のときの極限は存在しない

したがって

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない