1 $f(x)=|x|(x+1)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|(h+1)}{h}$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h|(h+1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h(h+1)}{h}=1$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{|h|(h+1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+1)}{h}=-1$$

よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|(h+1)}{h}=f'(0)$$

は存在しない

つまり，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない

2 次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$　　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(3)　$f(x)=\sqrt{3x-2}$

(1) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+x+h}-\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1+x-(1+x+h)}{(1+x+h)(1+x)}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\times\frac{-h}{(1+x+h)(1+x)}$$

$$=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

(2) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\times\frac{x^2-(x^2+2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\times\frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$

(3) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3(x+h)-2}-\sqrt{3x-2}}{h}\times\frac{\sqrt{3(x+h)-2}+\sqrt{3x-2}}{\sqrt{3(x+h)-2}+\sqrt{3x-2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-2-(3x-2)}{h\left(\sqrt{3(x+h)-2}+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h\left(\sqrt{3(x+h)-2}+\sqrt{3x-2}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

3 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\times\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\right\}$$

$$=2f'(a)+3f'(a)$$

$$=5f'(a)$$

4 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，次の極限値を $f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a-h)}{h}$

(1) $$\lim_{h\to0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{-2\times\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\right\}$$

$$=-2f'(a)$$

(2) $$\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{4\times\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}+1\times\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$$

$$=4f'(a)+f'(a)$$

$$=5f'(a)$$

5 次の関数 $f(x)$ は，$x=0$ で連続でありかつ微分可能でないことを示せ。

$x\neq0$ のとき　$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$f(0)=0$

$$0\leqq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1 \text{ より}$$

$$0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$$

$\displaystyle\lim_{x\to0}|x|=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

すなわち $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=0$ また，$f(0)=0$ なので，

$f(x)$ は $x=0$ で連続である。

また，$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}$$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\sin\frac{1}{h}$　$h\to0$ のとき $\sin\dfrac{1}{h}$ は一定の値に近づかない。

すなわち $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在しない。

したがって $f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。