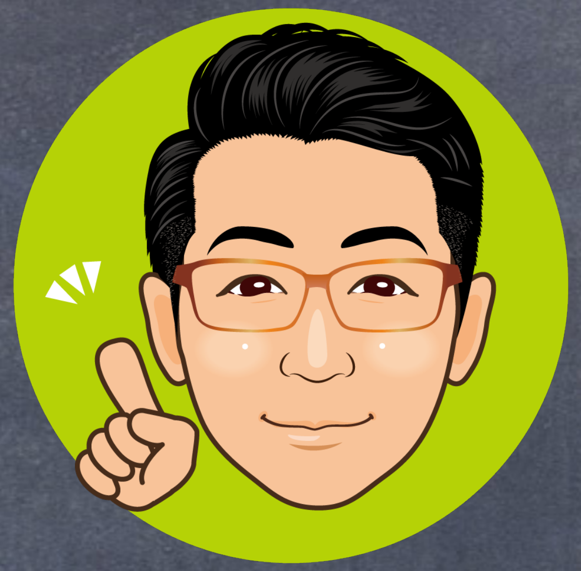
テーマ：

対数関数の導関数

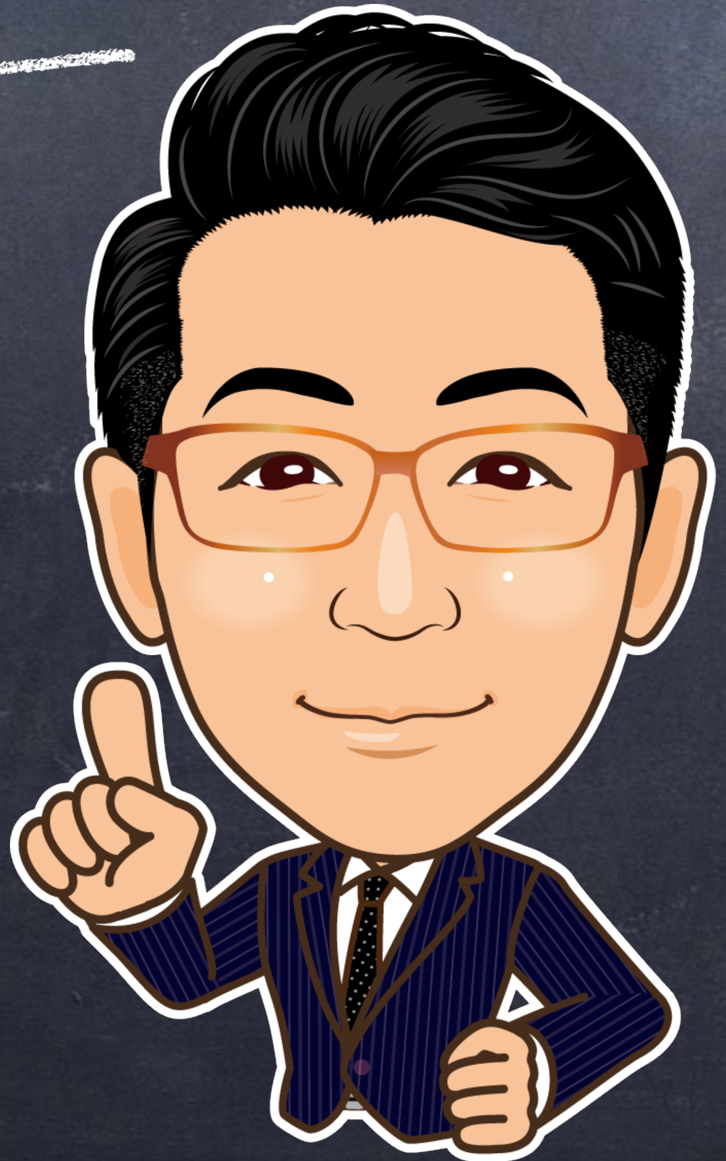
○ 対数関数の導関数

$(\log_a x)'$ を考える $(a \neq 1)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$



$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1+\frac{h}{x}\right)$$

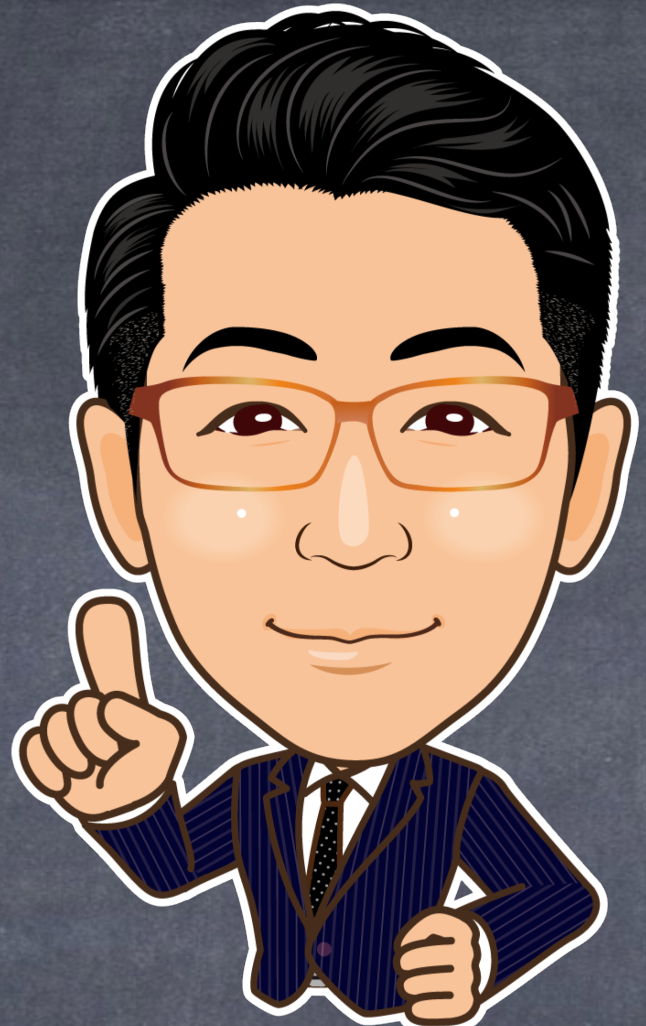
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \times \frac{x}{h} \log_a \left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \log_a \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで、$\frac{h}{x} = k$ とおくと。

$h \to 0$ のとき $k \to 0$, $\frac{x}{h} = \frac{1}{k}$ となる

$$= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$



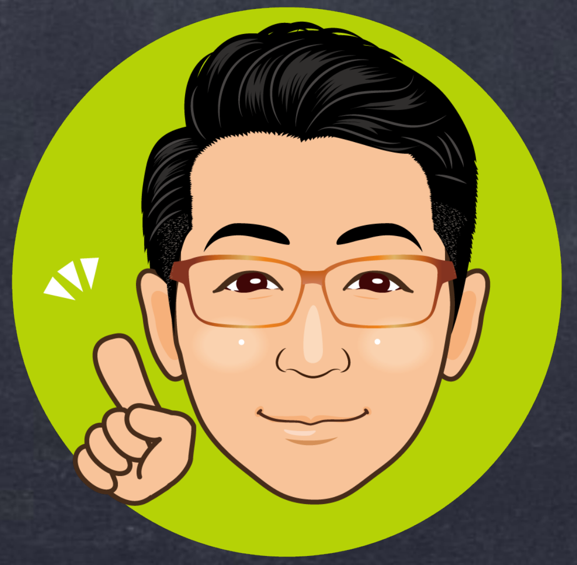
ここで、$\frac{h}{x}=k$ とおくと.

$h\to 0$ のとき $k\to 0$, $\frac{x}{h}=\frac{1}{k}$ となる

$$= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

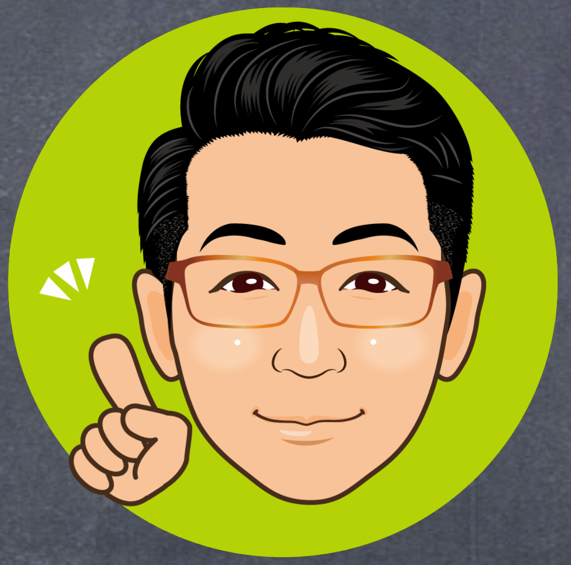
→ e

$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ に注目する!!



$\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ はある値に近づく

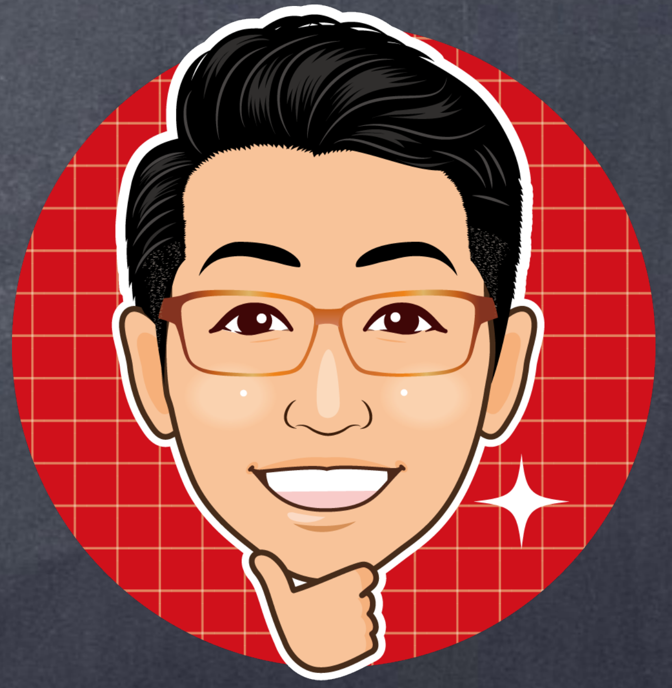
その値を e とする.



$$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

また、$e=2.7182\cdots$

(e は2.7ぐらい)

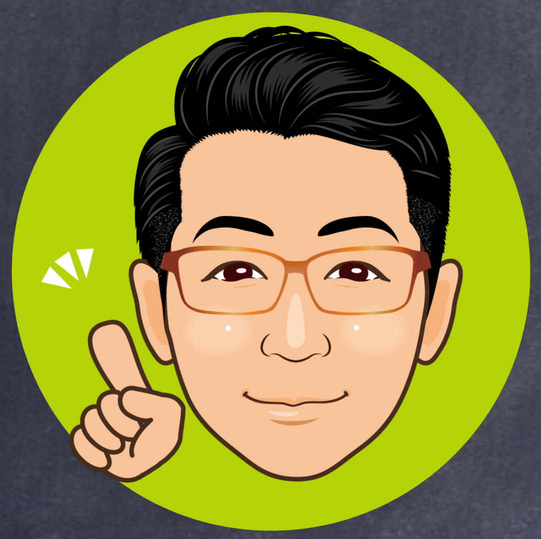


したがって

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

まだ、
終わりじゃない!!

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$



底の変換

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{\log_e a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log_e a}$$

特に、底がeのとき、

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

底をeにもつ対数 自然対数 という。

数Ⅲレベルでは、$\log_e x \Longleftrightarrow \log x$ と書く。

eは省略

以上より、

① $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

③ $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$

② $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$

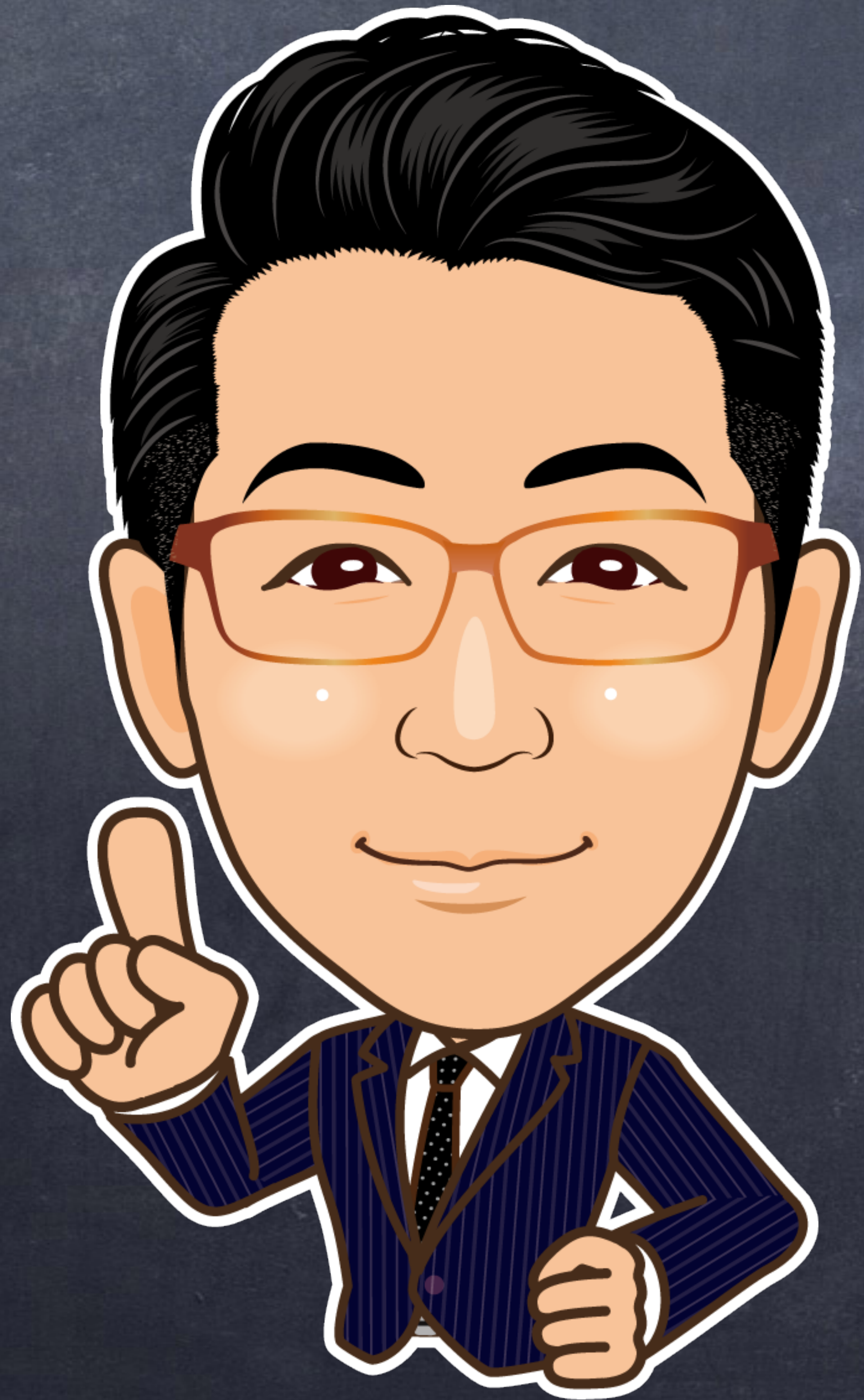
④ $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$

(Ex)

(1) $y = \log(2x+3)$

$$y' = \frac{1}{2x+3} \times (2x+3)'$$

$$y' = \frac{2}{2x+3}$$



(2) $y = x\log_2 x$

$$y' = x' \cdot \log_2 x + x \times (\log_2 x)'$$

$$= \log_2 x + x \cdot \frac{1}{x\log 2}$$

$$y' = \log_2 x + \frac{1}{\log 2}$$

(ex)

(3) $y = \log|\cos x|$

$$y' = \frac{1}{\cos x} \times (\cos x)'$$

$$= \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$y' = -\tan x$$

(4) $y = \log_3|x^2-1|$

$$y' = \frac{1}{(x^2-1)\log 3} \times (x^2-1)'$$

$$y' = \frac{2x}{(x^2-1)\log 3}$$