6－23　2次導関数と極値

$\boxed{1}$ 次の関数の極値を，第２次導関数を利用して求めよ。

(1)　$f(x)=x^3-9x^2+24x-7$　　(2)　$f(x)=x^4-4x^3+4x^2+3$

(3)　$f(x)=(x^2-3)e^{-x}$　　(4)　$f(x)=2\sin x-\sqrt{3}\,x$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$

$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$

$f'(x)=0$ とおくと $x=2, 4$.

$f''(2) = -6<0$, $f''(4) = 6>0$ より

$x=2$ で極大値 13

$x=4$ で極小値 9

(2) $f'(x) = 4x^3-12x^2+8x = 4x(x-1)(x-2)$

$f''(x) = 12x^2-24x+8 = 4(3x^2-6x+2)$

$f'(x)=0$ とおくと $x=0, 1, 2$.

$f''(0) = 8>0$, $f''(1) = -4<0$, $f''(2) = 8>0$ より

$x=0, 2$ で極小値 3, $x=1$ で極大値 4

(3) $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (x^2-3) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -(x+1)(x-3)e^{-x}$

$f''(x) = (x^2-4x-1)e^{-x}$.　$f'(x)=0$ とおくと $x=3, -1$

$f''(-1) = 4e>0$, $f''(3) = -\frac{4}{e^3}<0$ より

$x=-1$ で極小値 $-2e$, $x=3$ で極大値 $\frac{6}{e^3}$

(4) $f'(x) = 2\cos x - \sqrt{3}$,　$f''(x) = -2\sin x$

$0<x<2\pi$ において

$f'(x)=0$ とおくと $x = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$

$f''(\frac{\pi}{6}) = -1<0$, $f''(\frac{11}{6}\pi) = 1>0$ より

$x=\frac{\pi}{6}$ で極大値 $1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

$x=\frac{11}{6}\pi$ で極小値 $-1-\frac{11\sqrt{3}}{6}\pi$

$\boxed{2}$ 第２次導関数を利用して，次の関数の極値を求めよ。

(1)　$f(x)=x^3-9x^2+24x-7$　　(2)　$f(x)=x^4-2x^2+1$

(3)　$f(x)=x^3e^{-x}$　$(x>0)$　　(4)　$f(x)=x+2\sin x$　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

(1) $\boxed{1}$(1)と同様

(2) $f'(x) = 4x^3-4x = 4x(x+1)(x-1)$

$f''(x) = 12x^2-4$.　$f'(x)=0$ とおくと $x=0, \pm 1$

$f''(0) = -4<0$, $f''(-1) = 8>0$, $f''(1) = 8>0$ より

$x=0$ で極大値 1, $x=\pm 1$ で極小値 0

(3) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = x^2(3-x)e^{-x}$

$f''(x) = x(6-6x+x^2)e^{-x}$　　$f''(3) = -9e^{-3}<0$

$f'(x)=0$ とおくと $x>0$ より $x=3$.　　より

$x=3$ で極大値 $\frac{27}{e^3}$

(4) $f'(x) = 1+2\cos x$　　$f''(\frac{2}{3}\pi) = -\sqrt{3}<0$, $f''(\frac{4}{3}\pi) = \sqrt{3}>0$

$f''(x) = -2\sin x$　　よって

$f'(x)=0$ とおくと

$x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

$x=\frac{2}{3}\pi$ で極大値 $\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

$x=\frac{4}{3}\pi$ で極小値 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

3 関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=-1$ で極大となり，そのグラフの変曲点は点 $(0,\ 1)$ である。定数 a，b，c の値を求めよ。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

$x=-1$ で極大値 より

$f'(-1)=0$

$3-2a+b=0$ …①

変曲点 $(0,1)$ より

$f''(0)=0$, $f(0)=1$.

$0+2a=0$, $c=1$

$a=0$, $c=1$

①より $b=-3$

このとき

$f(x)=x^3-3x+1$, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f''(x)=6x$

ゆえに $f'(-1)=0$, $f''(-1)=-6<0$ より

$x=-1$ で極大値をとる.

また

$x<0$, $f''(x)<0$. より点 $(0,1)$ は変曲点である.

$x>0$, $f''(x)>0$

以上より $a=0$, $b=-3$, $c=1$

4 関数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ について，次の問いに答えよ。

(1) この関数のグラフの変曲点 P の座標を求めよ。

(2) この関数のグラフは，点 P に関して対称であることを示せ。

(1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$f''(x)=0$ とすると. $x=1$.

$x<1$ のとき $f''(x)<0$

$x>1$ のとき $f''(x)>0$

また $f(1)=-1$. よって 変曲点Pは $(1,-1)$

(2) 変曲点 $P(1,-1)$ が原点にくるように平行移動すると

$y-1=(x+1)^3-3(x+1)^2+1$

$y=x^3-3x$. $g(x)=x^3-3x$ とおくと

$g(-x)=-x^3+3x=-g(x)$

つまり $g(x)$ は奇関数である.

以上より $y=g(x)$ は原点対称. よって

もとの $y=g(x)$ は変曲点P対称である