テーマ：

逆関数の微分（解説）

1 逆関数の微分法の公式を用いて，次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(1) $(y+2)^2=x+5$　　　(2) $x=y^2-2y$

2 次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(1) $x=y^2-2y$　　　(2) $x=y^2+y+1$

3 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=\dfrac{1}{9}$ における微分係数を求めよ。

4 次の関数を微分せよ。逆関数とか関係なく、様々な微分の練習です。

(1) $y=(x-2)^2(x-3)^3$　(2) $y=(x+2)(x-1)(x-5)$

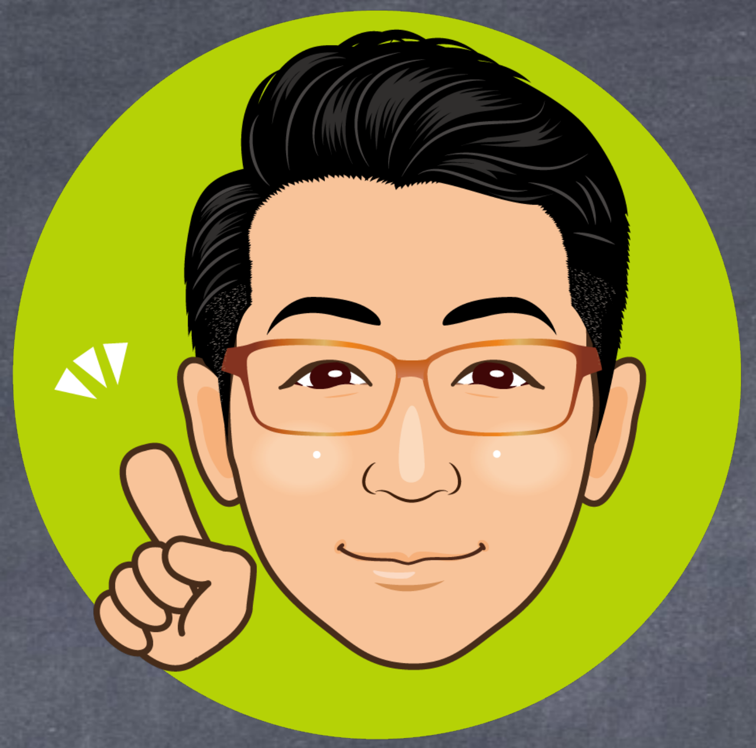
(3) $y=\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x}}$　(4) $y=\dfrac{x}{(2x-3)^2}$　(5) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$

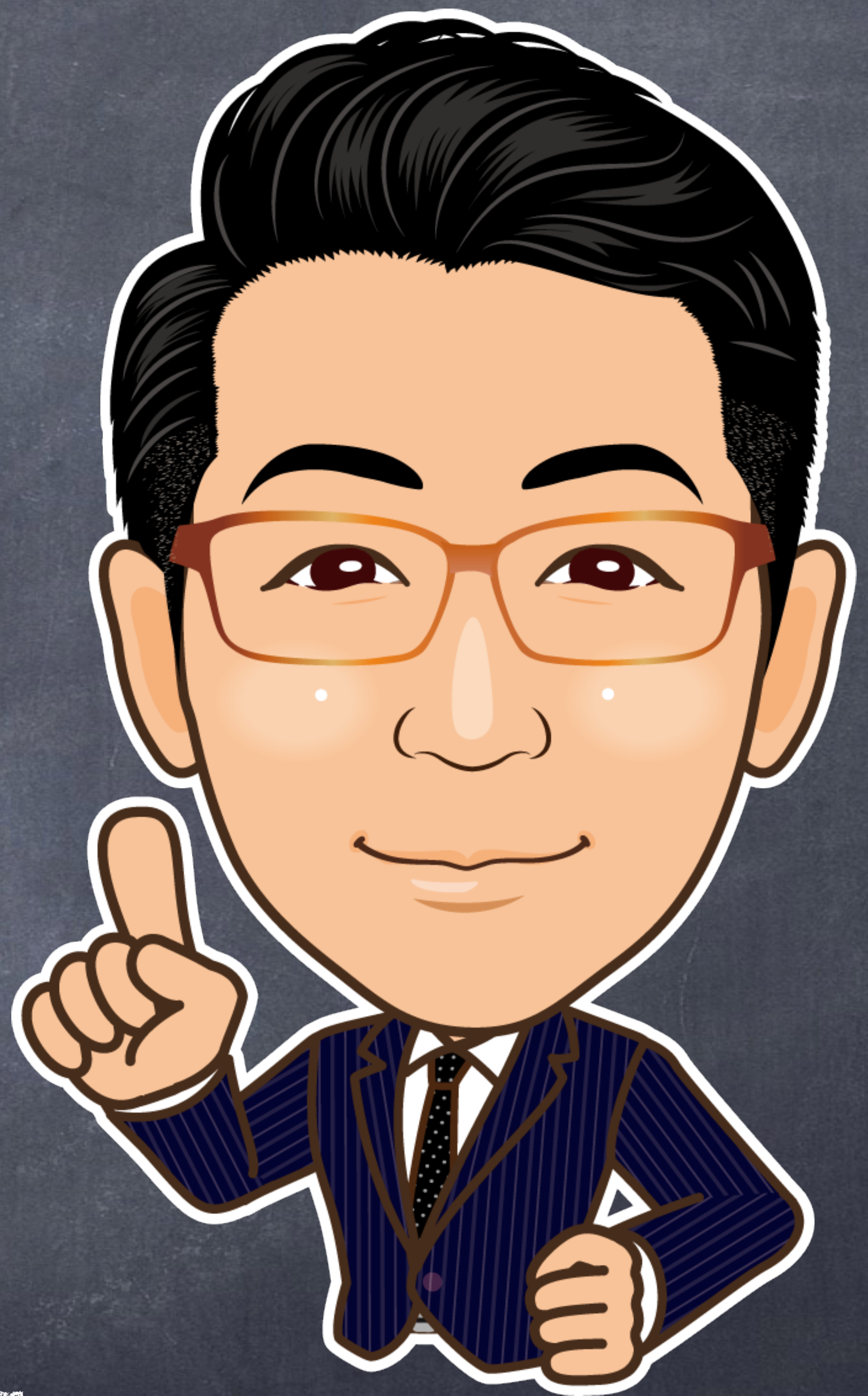
(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$　(7) $y=2x\sqrt{x^2+1}$　(8) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(9) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$　(10) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$　(11) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$\boxed{1}$ 逆関数の微分法の公式を用いて，次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(1) $(y+2)^2=x+5$　　　(2) $x=y^2-2y$





(1) $(y+2)^2=x+5$

$x=(y+2)^2-5$

両辺を y で微分

$$\frac{dx}{dy}=2(y+2)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y+2)}$$

ここで、

$(y+2)^2=x+5$ より

$y+2=\pm\sqrt{x+5}$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\pm 2\sqrt{x+5}}$$

$\boxed{2}$ 次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(1) $x=y^2-2y$ (2) $x=y^2+y+1$

(2) $x=y^2+y+1$

両辺を y で微分

$$\frac{dx}{dy}=2y+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y+1}$$

ここで，

$x=y^2+y+1$ より

$$y^2+y+1-x=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1-x)}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{4x-3}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-1\pm\sqrt{4x-3}+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$$

3 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x=\dfrac{1}{9}$ における微分係数を求めよ。

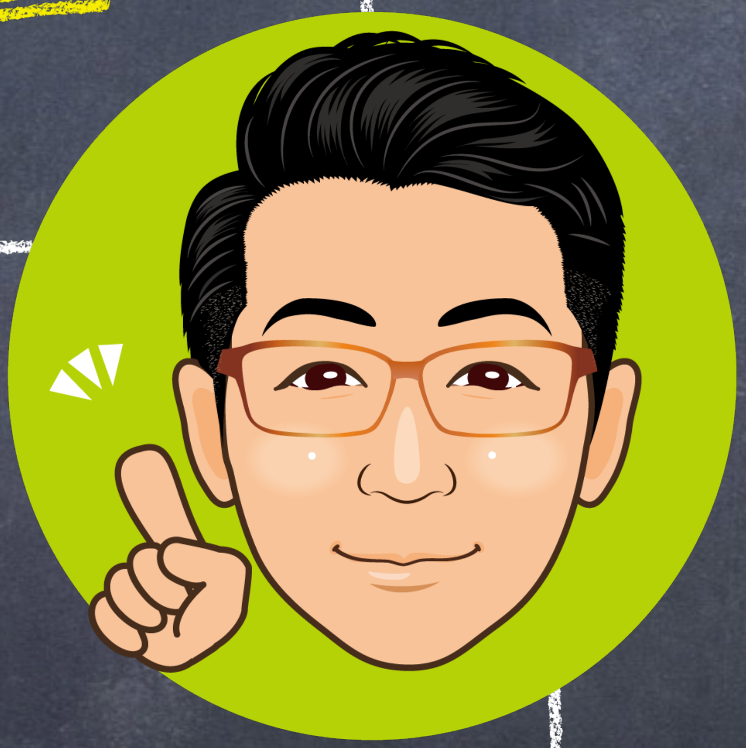
$y=f^{-1}(x)$ とすると.

$x=f(y)=\dfrac{1}{y^3+1}$ である

〈方針〉

$\{f^{-1}(x)\}'$ が欲しい.

$\Longrightarrow$ $y=f^{-1}(x)$ とおいているので, $\dfrac{dy}{dx}$ が欲しい



$x=\dfrac{1}{y^3+1}$

両辺 y で微分

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{3y^2}{(y^3+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(y^3+1)^2}{3y^2}$$

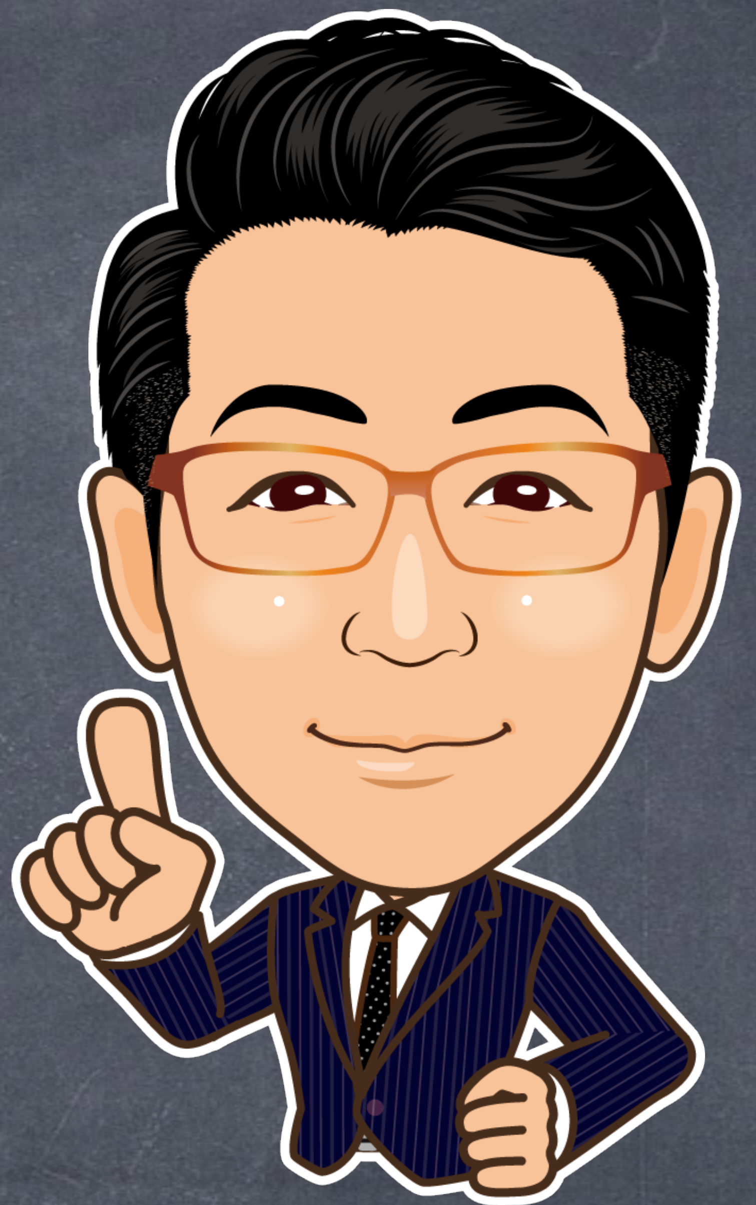
ここで, $x=\dfrac{1}{9}$ のとき $\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{y^3+1}$ より

$y^3+1=9$

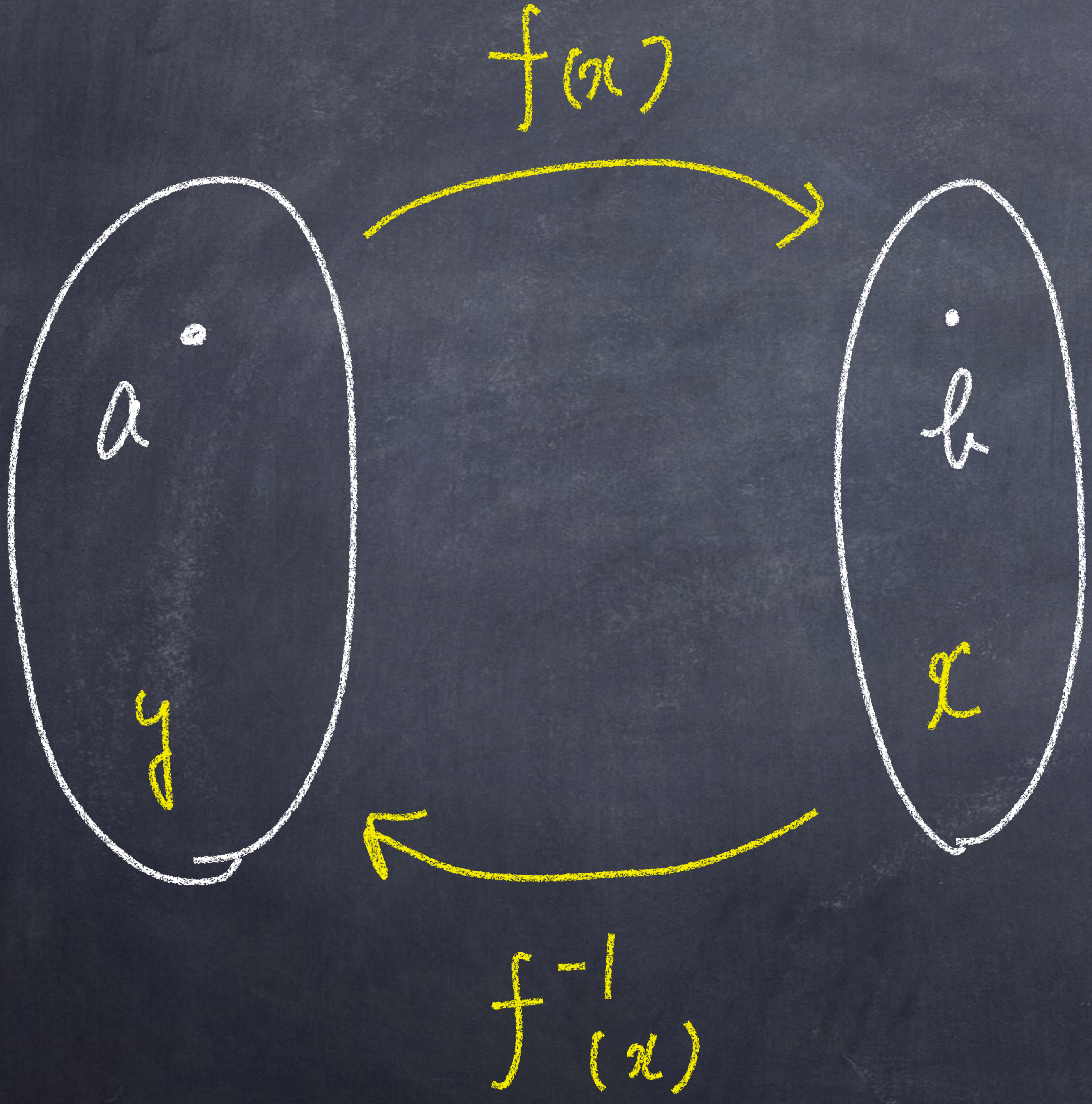
$y^3=8$, $y=2$

以上より

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{27}{4}$$



○逆関数について



a は $f(x)$ によって b になる

b は $f^{-1}(x)$ によって a になる

つまり、 $\boxed{f(a)=b \iff f^{-1}(b)=a}$

$y=f^{-1}(x)$ とする。

x は $f^{-1}(x)$ によって y になる。

y は $f(x)$ によって x になる $\iff f(y)=x$