$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x^3-2x$ と，区間 $[0,\ 1]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

関数 $f(x)$ は $[0, 1]$ で連続で，$(0, 1)$ で微分可能である。

$f(x)=x^3-2x$，$f'(x)=3x^2-2$

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$，$0<c<1$

$\dfrac{1-2}{1-0}=3c^2-2$　　$c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{2}$ 次の曲線上の 2 点 A，B について，直線 AB に平行な曲線の接線を引けるだけ引くとき，その接点の座標を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$　A $(0,\ 0)$，B $(4,\ 2)$　　　(2)　$y=\sin x$　A $(0,\ 0)$，B $(\pi,\ 0)$

(1) 直線ABの傾きは $\dfrac{2-0}{4-0}=\dfrac{1}{2}$

$y=\sqrt{x}$，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

接点の座標 $(c, \sqrt{c})$ とおいて

接線の傾きは $\dfrac{1}{2\sqrt{c}}$

直線ABと平行なので

$\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{1}{2}$

$\sqrt{c}=1$

$c=1$

したがって 接点の座標 $(1, 1)$

(2)

直線ABの傾きは $\dfrac{0-0}{\pi-0}=0$

$y=\sin x$，$y'=\cos x$

接点の座標 $(c, \sin c)$ とおく

接線の傾きは $\cos c$

直線ABと平行なので

$\cos c=0$

$\cos c=0$ より

$c=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ （nは整数）

また 接点のy座標は

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)$

これは nが偶数のとき 1，奇数のとき -1

以上より

nが偶数のとき

$\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ 1\right)$

nが奇数のとき

$\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ -1\right)$

$\boxed{3}$ 次の関数と，示された区間について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$　$[1,\ 2]$　　　(2)　$f(x)=\log x$　$[1,\ e^2]$

(1) 関数 $f(x)$ は

$[1, 2]$ で連続，$(1, 2)$ で微分可能

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c)$ $(1<c<2)$

$\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{c^2}$

$c^2=2$

$c=\pm\sqrt{2}$

$1<c<2$ より

$c=\sqrt{2}$

(2) 関数 $f(x)$ は

$[1, e^2]$ で連続，$(1, e^2)$ で

微分可能

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{f(e^2)-f(1)}{e^2-1}=f'(c)$，$(1<c<e^2)$

$\dfrac{2-0}{e^2-1}=\dfrac{1}{c}$

$c=\dfrac{e^2-1}{2}$

これは $1<c<e^2$ をみたす

$c=\dfrac{e^2-1}{2}$

4　2次関数 $f(x)=px^2+qx+r$ と，区間 $[a,\ b]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を $a,\ b$ で表せ。

関数 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続. (a, b) で微分可能.

$$f'(x)=2px+q$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b$$

$$\frac{pb^2+qb+r-(pa^2+qa+r)}{b-a}=2pc+q$$

$$p(b+a)+q=2pc+q$$

$$2pc=p(b+a)$$

$f(x)$ は2次関数なので $p\neq 0$

$$c=\frac{a+b}{2}$$

これは $a<c<b$ をみたす

$$c=\frac{a+b}{2}$$

5　関数 $f(x)=x\cos x$ について，開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に $f'(x)=0$ を満たす実数 x が存在することを示せ。

関数 $f(x)$ は $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で連続. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ で微分可能

$$f'(x)=\cos x-x\sin x$$

平均値の定理より

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}=f'(x),\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

となる x が存在する

ここで

$$(\text{左辺}):\ \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0\cdot\cos 0}{\frac{\pi}{2}}=0$$

つまり

$0<x<\frac{\pi}{2}$ に $f'(x)=0$ となる x が存在する.

6　(1)　$f(x)=2\sqrt{x}$ と区間 $[1,\ 4]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとき，$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$ を満たす θ を正の数 $a,\ h$ で表し，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\theta$ を求めよ。

(1) 関数 $f(x)$ は $[1, 4]$ で連続. $(1, 4)$ で微分可能.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{2\sqrt{4}-2\sqrt{1}}{4-1}=f'(c),\ 1<c<4$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$\sqrt{c}=\frac{3}{2},\ c=\frac{9}{4}$$

これは $1<c<4$ をみたす

$$c=\frac{9}{4}$$

(2) $$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$ より

$$\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=h\cdot\frac{-1}{(a+\theta h)^2}$$

$$a(a+\theta h)^2-(a+h)(a+\theta h)^2=-ah(a+h)$$

$$(a+\theta h)^2=a(a+h)$$

$a+\theta h>0$ より

$$a+\theta h=\sqrt{a(a+h)}$$

$$\theta=\frac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h}$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}\times\frac{\sqrt{a^2+ah}+a}{\sqrt{a^2+ah}+a}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{ah}{h\left(\sqrt{a^2+ah}+a\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{a}{\sqrt{a^2+ah}+a}=\lim_{h\to+0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{a}}+1}=\frac{1}{2}$$