テーマ：

平均値の定理②（解説）

平均値の定理②

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 平均値の定理を用いて，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

(1) $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

(2) $\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

$\boxed{3}$ 平均値の定理を用いて，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}}{x-\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x^2}{x-x^2}$

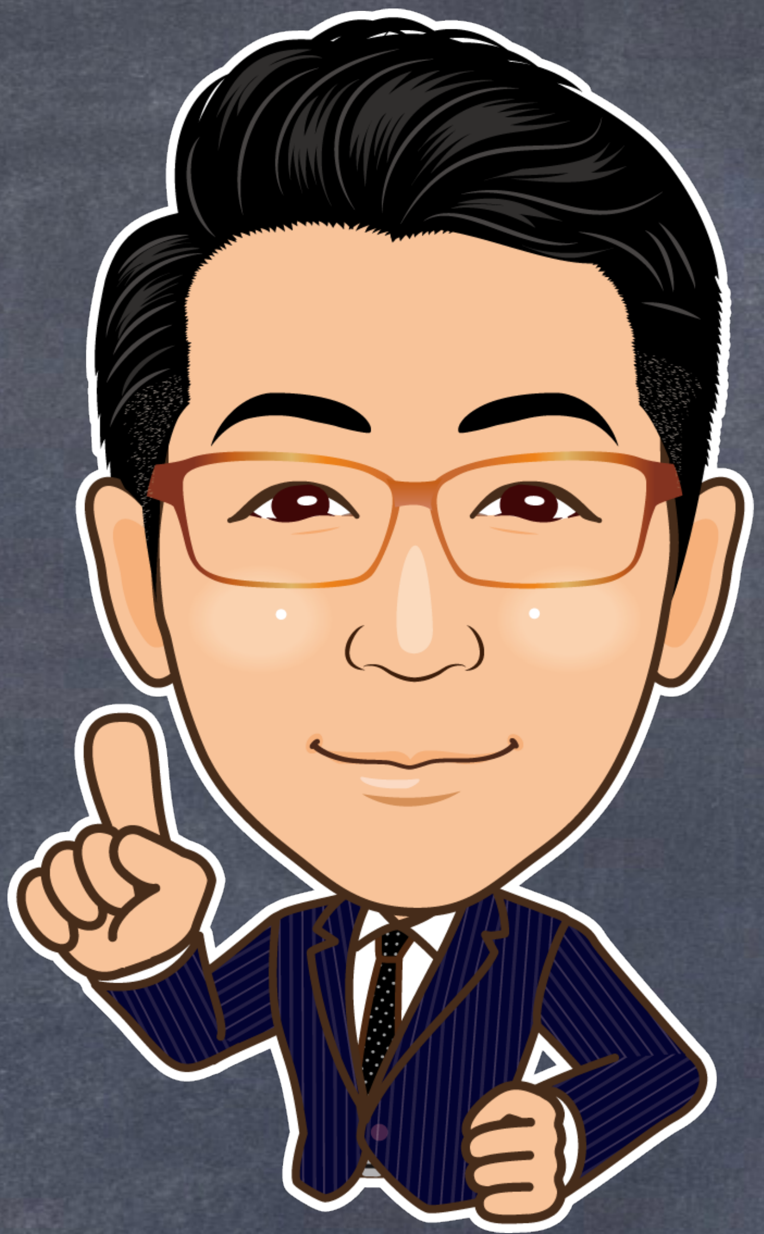
(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+3)-\log x\}$

$\boxed{1}$ 平均値の定理を用いて，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ を求めよ。

$x \to +0$ なので

$x>0$ で考えると．

$\sin x < x$ である．



したがって

$f(t)=e^t$，$[\sin x, x]$

で平均値の定理を

用いると．

$$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^c,\quad \sin x < c < x$$

となる実数 c が存在する．

ここで．

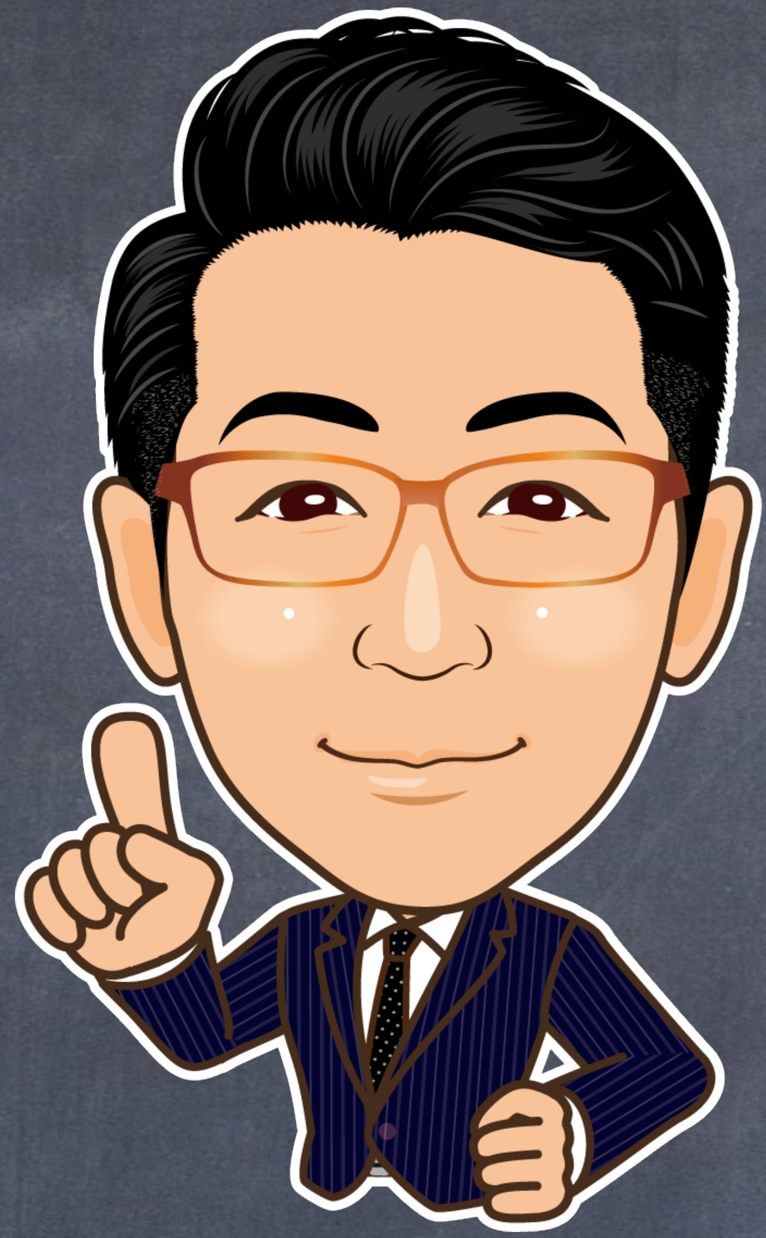
$$\lim_{x\to+0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to+0}e^c$$

また．$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0$ より

$\displaystyle\lim_{x\to+0}c=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to+0}e^c=\underline{1}$

2 平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

(1) $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$



$f(x)=\sin x$, $[\alpha, \beta]$

$f'(x)=\cos x$

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=\cos c \ , \ \alpha<c<\beta$$

となる実数 c が存在する.

$0<\alpha<c<\beta<\frac{\pi}{2}$ より

$0<c<\frac{\pi}{2}$

$0<\cos c<1$ である

よって

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}<1$$

すなわち $\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

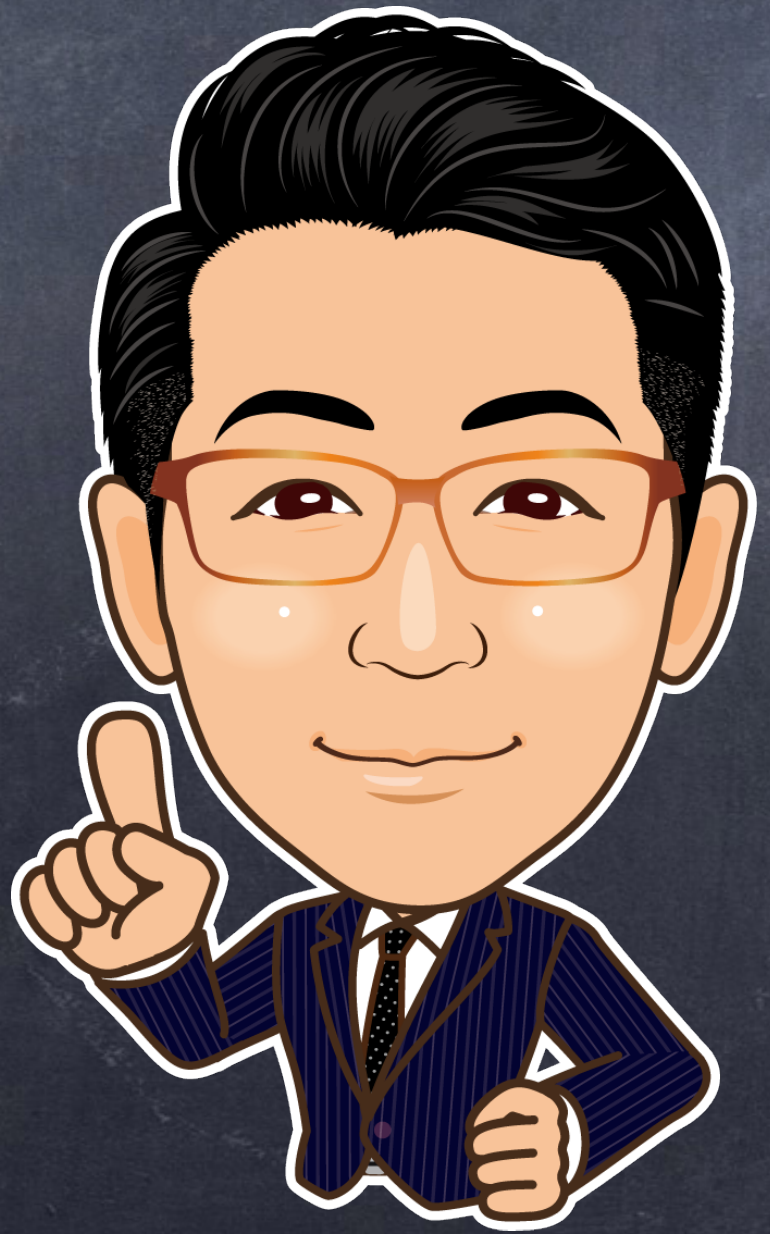
(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\{\log(x+3)-\log x\}$

$f(t) = \log t$, $[x, x+3]$

$$\frac{\log(x+3)-\log x}{x+3-x} = \frac{1}{c} , \quad x < c < x+3$$

となる実数 c が存在

$$\log(x+3)-\log x = \frac{3}{c}$$



$$\lim_{x\to\infty} x\{\log(x+3)-\log x\}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{c}$$

ここで，$0 < x < c < x+3$ より

$$\frac{1}{x+3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\frac{x}{x+3} < \frac{x}{c} < 1$$

(3) $\lim_{x\to\infty} x\{\log(x+3)-\log x\}$

$$\frac{x}{x+3} < \frac{x}{c} < 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{x}}$$

$$= 1$$

すなわち

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{c} = 1$$

以上より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{c} = 3$$

J・2

$$\lim_{x\to\infty} x\{\log(x+3)-\log x\} = 3$$