

テーマ：

曲線の方程式と導関数（解説）



1 方程式 $x^2 + 2x + y^2 = 1$ で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

2 次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y^2 = 16x$

(2) $4x^2 + y^2 = 1$

(3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

(4) $xy = 1$

3 次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2 - xy - y^2 = 1$

(2) $-xy^2 + y^3 = 1$

(3) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$

(4) $\sin x - \cos y = 1$

(5) $x = \cos(x + y)$

5 方程式 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ x と y を用いて表せ。ただし、 $y \neq 0$ とする。

4 次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。ただし、 y を用いて表してもよい。

(1) $y^2 = 8x$ (2) $x^2 + y^2 = 2$ (3) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ (4) $2xy - 3 = 0$

$$(4) \quad xy = 1$$

$$xy = 1$$

$$x \frac{d}{dx} (xy) = 0$$

$$x'y + xy' = 0$$

$$y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$xy = 1 \Rightarrow x \neq 0 \text{ and } y \neq 0$$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}}$$

$$(2) \quad x^3 - xy^2 + y^3 = 1$$

$$x^3 - xy^2 + y^3 = 1 \quad x \frac{d}{dx} (x^3 - xy^2 + y^3) = 0$$

$$3x^2 - (x'y^2 + xy^2 \cdot \frac{d}{dx}) + y^3 \cdot \frac{d}{dx} = 0$$

$$3x^2 - (y^2 + x \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} y^2) + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} y^3 = 0$$

$$3x^2 - (y^2 + 2xy \frac{dy}{dx}) + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y(2x - 3y) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - y^2$$

$$y(2x - 3y) \neq 0 \text{ and } x \neq 0$$

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{y(2x - 3y)}}}$$

5 方程式 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ で定められる x の関数 y について, $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ x と y

を用いて表せ。ただし, $y \neq 0$ とする。

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

x^2 微分

$$\frac{1}{2}x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} \frac{y^2}{9} = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{2}{9}y = 0$$

$$y \neq 0 \text{ かつ } \frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y} = \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{y}$$

x^2 微分

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{x'y - x y'}{y^2}$$

$$= \frac{9}{4} \cdot \frac{y - x \cdot \frac{9x}{4y}}{y^2}$$

$$= -\frac{81}{4y^3} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{81}{4y^3}$$