1 xの関数yが，tを媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$をtの関数として表せ。

(1)　$x=t-2$，$y=2t^2$　　(2)　$x=t^2-t+1$，$y=t^3-t-1$

(3)　$x=\sin 2t$，$y=\cos t$　　(4)　$x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$

(1) $\dfrac{dx}{dt}=1$, $\dfrac{dy}{dt}=4t$

$$\frac{dy}{dx}=4t$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2t-1$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-1}{2t-1}$$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\cos 2t\cdot 2$　$\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin t}{2\cos 2t}$$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$

$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

2 xの関数yが，tを媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$をtの関数として表せ。

(1)　$x=t+\dfrac{1}{t}$，$y=t-\dfrac{1}{t}$　　(2)　$x=\cos^3 t$，$y=2\sin^3 t$

(3)　$x=\sqrt{1-t^2}$，$y=t^2+1$　　(4)　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(5)　$x=\cos t+t\sin t$，$y=\sin t-t\cos t$

(1) $\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{-1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{-1}{t^2}$　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{t^2-1}{t^2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t^2+1}{t^2-1}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=3\cos^2 t\cdot(-\sin t)$　$\dfrac{dy}{dt}=2\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6\sin^2 t\cos t}{-3\sin t\cos^2 t}=-\frac{2\sin t}{\cos t}\left(=-2\tan t\right)$$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$　$\dfrac{dy}{dt}=2t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}=-2\sqrt{1-t^2}$$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(1-t^2)}{-4t}=\frac{t^2-1}{2t}$$

(5) $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

$$\frac{dy}{dt}=\cos t-\{\cos t+t\cdot(-\sin t)\}=t\sin t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t\sin t}{t\cos t}=\frac{\sin t}{\cos t}\left(=\tan t\right)$$

$\boxed{3}$ x の関数 y が，t を媒介変数として，次の式で表されるとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1)　$x=t+1$，$y=2t-1$　　(2)　$x=\sqrt{1-t^2}$，$y=t^2+1$

(3)　$x=\sin t$，$y=\cos 2t+1$　　(4)　$x=t+\sin t$，$y=1+\cos t$

(1) $\dfrac{dx}{dt}=1$，$\dfrac{dy}{dt}=2$

$$\frac{dy}{dx}=2$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}=-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

$\dfrac{dy}{dt}=2t$，$\dfrac{dy}{dx}=-2\sqrt{1-t^2}$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=-\sin 2t\cdot 2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=\frac{-4\sin t\cos t}{\cos t}=-4\sin t$$

(4) $\dfrac{dx}{dt}=1+\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin t}{1+\cos t}$$

$\boxed{4}$ $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$，$y=\dfrac{2t}{1-t^2}$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ t の関数で表せ。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t(1-t^2)-(1+t^2)\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}=\frac{4t}{(1-t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1-t^2)-2t\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}=\frac{2+2t^2}{(1-t^2)^2}$$

$t\neq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+t^2}{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{2t\cdot 2t-(1+t^2)\cdot 2}{(2t)^2}\cdot\frac{(1-t^2)^2}{4t}=-\frac{(1-t^2)^3}{8t^3}$$

$\boxed{5}$ x の関数 y が媒介変数 θ を用いて $x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ と表されているとき

(1)　$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ θ で表せ。

(2)　$\tan\dfrac{\theta}{2}=2$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$=\frac{\sin\theta\cdot\sin\theta-(1-\cos\theta)\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

(2) $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=-\dfrac{4}{3}$，$\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-1=-\dfrac{3}{5}$

$\sin\theta=-\dfrac{4}{3}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}}=2\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)^3}=\frac{25}{8}$$