$\boxed{1}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1)　$y=4\cos x+\cos 2x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$　　　(2)　$y=e^{-x}\cos x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(1) $y' = -4\sin x + (-\sin 2x)\cdot 2$

$= -4\sin x - 4\sin x\cos x$

$= -4\sin x(1+\cos x)$

$y'' = -4\cos x - 2\cos 2x\cdot 2$

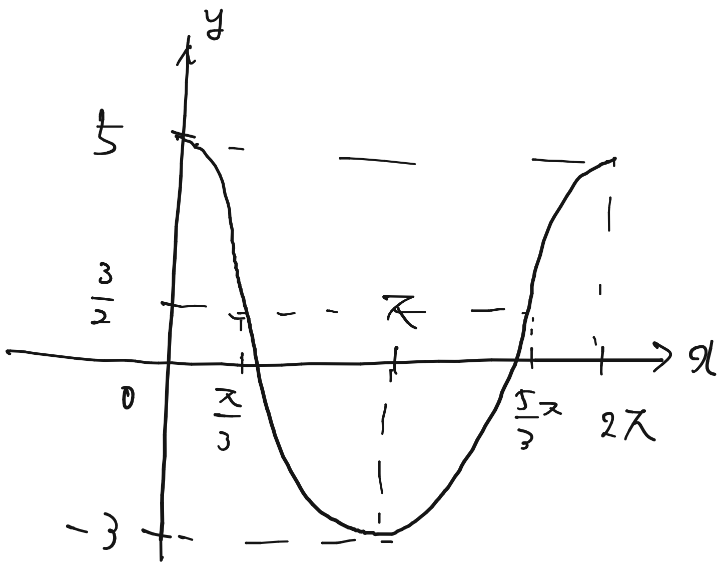
$= -4\{\cos x + (2\cos^2 x - 1)\}$

$y'' = -4(\cos x + 1)(2\cos x - 1)$

$0<x<2\pi$ で

$y'=0$ となる $x=\pi$, $y''=0$ となる $x=\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi, \pi$

x	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	π	…	$\frac{5}{3}\pi$	…	2π
y'	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	/
y''	/	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	/
y	5	↘	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↗	5



(2) $y' = e^{-x}\cdot(-1)\cos x + e^{-x}\cdot(-\sin x)$

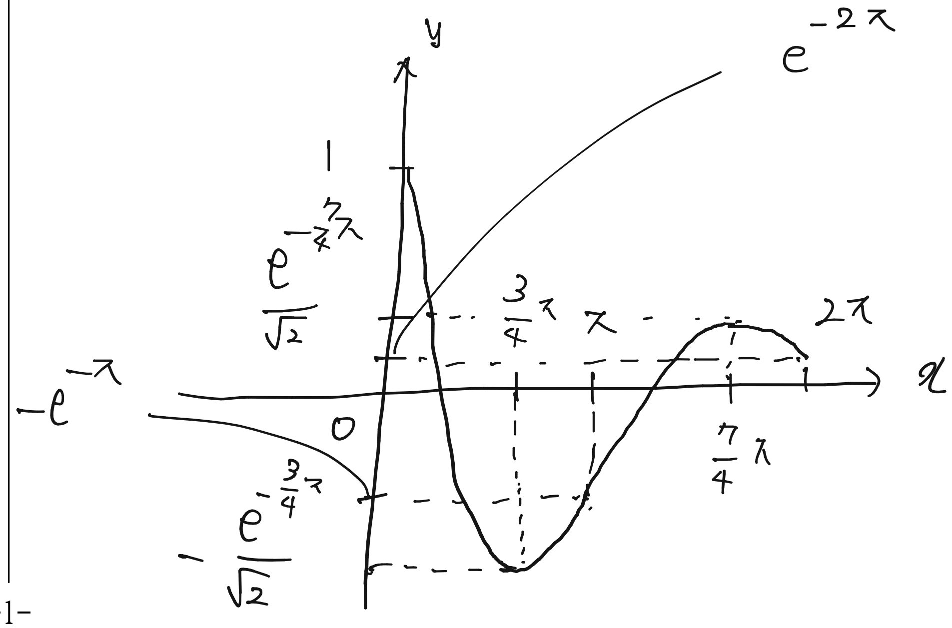
$y' = -e^{-x}(\sin x + \cos x)$　, $y'' = 2e^{-x}\sin x$

$y' = -\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0<x<2\pi$ で

$y'=0$ となる $x=\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{7}{4}\pi$　, $y''=0$ となる $x=\pi$

x	0	…	$\frac{3}{4}\pi$	…	π	…	$\frac{7}{4}\pi$	…	2π
y'	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	/
y''	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/
y	1	↘	$-\frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↗	$-e^{-\pi}$	↗	$\frac{e^{-\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↘	$e^{-2\pi}$



$\boxed{2}$ 関数 $y=x-\sqrt{x^2-9}$ のグラフの概形をかけ。ただし，関数 $y=f(x)$ について，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-ax\}=b$ ならば，直線 $y=ax+b$ は $y=f(x)$ のグラフの漸近線であることを用いてよい。

$x^2-9 \geqq 0 \quad (x \leqq -3,\ 3 \leqq x)$

$x<-3,\ 3<x$ のとき

$$y' = 1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = 1-\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}-x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$y'' = \frac{9}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}} > 0$$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$				$-$
y''	$+$				$+$
y	↗	-3		3	↘

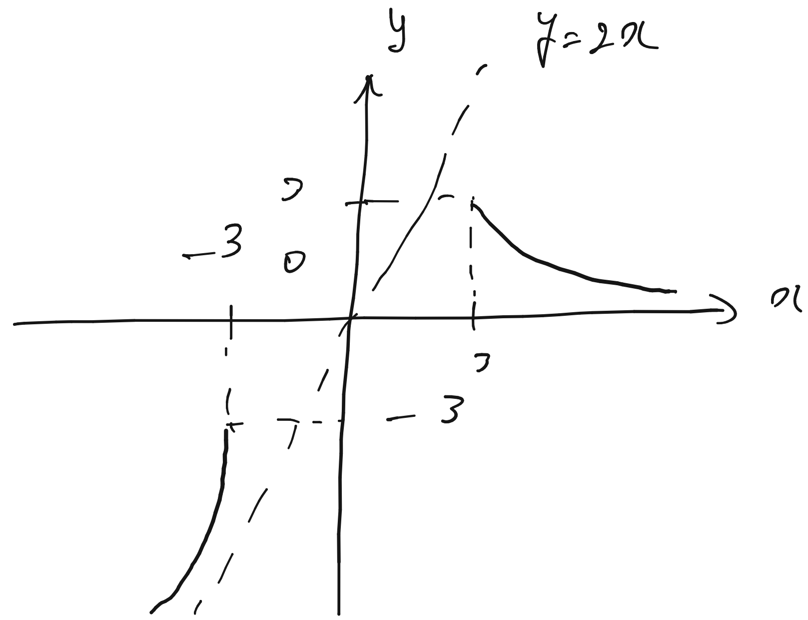
$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{9}{x+\sqrt{x^2-9}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\left\{x-(-x)\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right\}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2-9}\right) = 0$$

よって 漸近線は $y=2x$，x軸



６－２２　グラフの書き方②

$\boxed{3}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1)　$y=x-1+\sqrt{1-x^2}$　　　(2)　$y=e^{\frac{1}{x}}$

(1) $1-x^2 \geqq 0$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$

$-1<x<1$ のとき

$$y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$y'=0$ となるとき

$$\sqrt{1-x^2} = x$$

$$1-x^2 = x^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

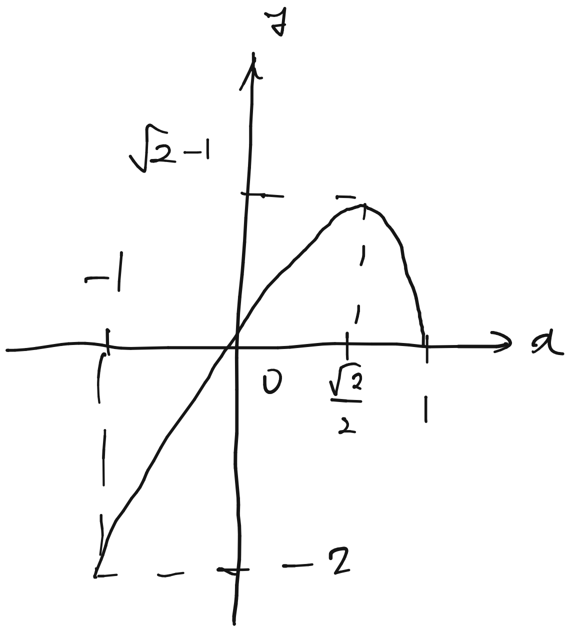
$-1<x<1$ より

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

また

$-1<x<1$ のとき $y''<0$

x	-1	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	1
y'	/	$+$	0	$-$	/
y''	/	$-$	$-$	$-$	/
y	-2	↗	$\sqrt{2}-1$	↘	0



(2) $x \neq 0$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$y'' = -\left\{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\right\} = \frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

$y'<0$, $y''=0$ となるとき $x=-\frac{1}{2}$

x	…	$-\frac{1}{2}$	…	0	…
y'	$-$	$-$	$-$	/	$-$
y''	$-$	0	$+$	/	$+$
y	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘	/	↘

$$\lim_{x\to\infty} y = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = 1$$

$$\lim_{x\to+0} y = \infty$$

$$\lim_{x\to-0} y = 0$$