6－13　接線の方程式②

1　曲線 $y=e^x+3e^{-x}$ の接線で，傾きが2であるものの方程式とその接点の座標を求めよ。

$y' = e^x + 3e^{-x}\cdot(-1)$

$= e^x - 3e^{-x}$

接点のx座標aとすると

$e^a - 3e^{-a} = 2$

$(e^a)^2 - 3 = 2e^a$

$(e^a)^2 - 2e^a - 3 = 0$

$(e^a - 3)(e^a + 1) = 0$

$e^a = 3, -1$　$e^a > 0$ より $e^a = 3$

$a = \log 3$

また $x = a$ のとき $y = e^a + 3e^{-a}$

$= e^{\log 3} + 3\cdot\frac{1}{e^{\log 3}}$

$= 3 + 1 = 4$

よって 接点 $(\log 3, 4)$

$y - 4 = 2(x - \log 3)$

$y = 2x - 2\log 3 + 4$

2　次の曲線に，点Aから引いた接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\frac{2x}{x+1}$　A (1, 2)

(2)　$y=\log x$　A (0, 1)

(1) 接点の座標 $\left(a, \frac{2a}{a+1}\right)$ とする

$y' = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

接線の方程式は,

$y - \frac{2a}{a+1} = \frac{2}{(a+1)^2}(x - a)$

これが (1, 2) を通るので

$2 - \frac{2a}{a+1} = \frac{2}{(a+1)^2}(1 - a)$

$2(a+1)^2 - 2a(a+1) = 2(1 - a)$

$2(a^2+2a+1) - 2a^2 - 2a = 2 - 2a$

$4a = 0,\ a = 0$

よって

$a=0$ のとき 接線 $y = 2x$

(2) 接点の座標 $(a, \log a)$ とする

$y' = \frac{1}{x}$

$y - \log a = \frac{1}{a}(x - a)$

これが点 (0, 1) を通る

$1 - \log a = \frac{1}{a}(0 - a)$

$1 - \log a = -1$

$\log a = 2$

$a = e^2$

よって $y = \frac{1}{e^2}x + 1$

3　曲線 $y=\sqrt{ax+b}$ が点 (1, 1) で直線 $y=2x-1$ に接するように，定数 a，b の値を定めよ。

$f(x) = \sqrt{ax+b}$ とおく

$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$y=f(x)$ が $y=2x-1$ で点 (1, 1) で接するための条件は

$f(1) = 1$ …①　$f'(1) = 2$ …②

①より $\sqrt{a+b} = 1$

②より $\frac{a}{2\sqrt{a+b}} = 2$

$\frac{a}{2} = 2$.　$a = 4$.

$b = -3$

$a = 4,\ b = -3$

4　2つの関数 $y=2\cos x$ $(0\leqq x<2\pi)$，$y=a+\sin 2x$ $(0\leqq x<2\pi)$ のグラフが接するとき，定数 a の値を求めよ。

$f(x) = 2\cos x$，$g(x) = a + \sin 2x$ とおく

$f'(x) = -2\sin x$.　$g'(x) = 2\cos 2x$

$y=f(x)$, $y=g(x)$ が $x=\alpha$ で接するための条件は

$f(\alpha) = g(\alpha)$ …①　$f'(\alpha) = g'(\alpha)$ …②

① より

$$2\cos\alpha = a + \sin 2\alpha \quad \cdots ①'$$

② より

$$-2\sin\alpha = 2\cos 2\alpha \quad \cdots ②'$$

$$= 2(1-2\sin^2\alpha)$$

$$2\sin^2\alpha - \sin\alpha - 1 = 0$$

$$(\sin\alpha - 1)(2\sin\alpha + 1) = 0$$

$$\sin\alpha = 1,\ -\frac{1}{2}$$

$0 \le \alpha < 2\pi$ より

$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

①' より

$$a = 2\cos\alpha - \sin 2\alpha$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき

$$a = 2\cos\frac{\pi}{2} - \sin\pi = 0$$

$\alpha = \frac{7}{6}\pi$ のとき　$a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\alpha = \frac{11}{6}\pi$ のとき　$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

以上より

$$a = 0,\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5　2つの曲線 $y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$ に共通な接線の方程式を求めよ。

$f(x)=x^2$，$g(x)=\frac{1}{x}$ とおく

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$y=f(x)$ 上の点 $(p,\ p^2)$ における接線は

$$y-p^2=2p(x-p)$$

$$y=2px-p^2 \quad \cdots ①$$

$y=g(x)$ 上の点 $\left(q,\ \frac{1}{q}\right)$ における接線は $(q\neq 0)$

$$y-\frac{1}{q}=-\frac{1}{q^2}(x-q)$$

$$y=-\frac{1}{q^2}x+\frac{2}{q} \quad \cdots ②$$

① と ② が一致するときは

$$2p=-\frac{1}{q^2},\quad -p^2=\frac{2}{q}$$

$$p=-\frac{1}{2q^2}\qquad -\left(-\frac{1}{2q^2}\right)^2=\frac{2}{q}$$

$$8q^3+1=0$$

$$(2q+1)(4q^2-2q+1)=0$$

$$(2q+1)\left\{4\left(q-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}=0$$

$$2q+1=0,\quad q=-\frac{1}{2}$$

$q=-\frac{1}{2}$ は $q\neq 0$ をみたす

② より

求める方程式は

$$y=-4x-4$$

6　直線 $y=\frac{1}{2}x+a$ が曲線 $y=\log x$ に接するとき，定数 a の値を求めよ。

$f(x)=\log x$ とおく

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$y=\frac{1}{2}x+a$ と $y=f(x)$ が

$x=\alpha$ で接する条件は

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}\alpha+a,\quad f'(\alpha)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\alpha+a=\log\alpha,\quad \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}$$

$$\alpha=2$$

$$1+a=\log 2$$

$$a=\log 2-1$$

以上より

$$a=\log 2-1$$