$\boxed{1}$ 逆関数の微分法の公式を用いて，次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(1) $(y+2)^2 = x+5$

(2) $x = y^2 - 2y$

(1) $(y+2)^2 = x+5$

両辺 y で微分する

$2(y+2) = \dfrac{dx}{dy}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2(y+2)}$

$(y+2)^2 = x+5$ より

$y+2 = \pm\sqrt{x+5}$

$y\cdot 2$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\pm 2\sqrt{x+5}}$

(2) $x = y^2 - 2y$

両辺を y で微分する

$\dfrac{dx}{dy} = 2y - 2$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y-2}$

$x = y^2 - 2y$ より

$y^2 - 2y - x = 0$

$y = 1 \pm \sqrt{1+x}$

$y - 1 = \pm\sqrt{1+x}$

$y-2$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\pm 2\sqrt{1+x}}$

$\boxed{2}$ 次の関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ。

(1) $x = y^2 - 2y$ ✗

$\boxed{1}(2)$ と同じ

(2) $x = y^2 + y + 1$

(2) $x = y^2 + y + 1$

両辺 y で微分

$\dfrac{dx}{dy} = 2y + 1$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y+1}$

$y^2 + y + 1 - x = 0$ より

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(1-x)}}{2}$

$= \dfrac{-1 \pm \sqrt{4x-3}}{2}$

$2y = -1 \pm \sqrt{4x-3}$

$2y+1 = \pm\sqrt{4x-3}$

$y-2$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{4x-3}}$

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の $x = \dfrac{1}{9}$ における微分係数を求めよ。

$y = f^{-1}(x)$ とする。

$x = f(y) = \dfrac{1}{y^3+1}$

$x = \dfrac{1}{y^3+1}$

両辺 y で微分

$\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{3y^2}{(y^3+1)^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(y^3+1)^2}{3y^2}$

$x = \dfrac{1}{9}$ のとき $\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{y^3+1}$

$y^3 + 1 = 9$

$y^3 = 8$

$y = 2$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(2^3+1)^2}{3\cdot 2^2}$

$= -\dfrac{27}{4}$

詳しくは、動画を確認！！

4 次の関数を微分せよ。逆関数とか関係なく、様々な微分の練習です。

(1) $y=(x-2)^2(x-3)^3$

(2) $y=(x+2)(x-1)(x-5)$

(3) $y=\dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x}}$

(4) $y=\dfrac{x}{(2x-3)^2}$

(5) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$

(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$

(7) $y=2x\sqrt{x^2+1}$

(8) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(9) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(10) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

(11) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(1) $y'=2(x-2)(x-3)^3+(x-2)^2\cdot3(x-3)^2$

$=(x-2)(x-3)^2\{2(x-3)+(x-2)\cdot3\}$

$=(x-2)(x-3)^2(5x-12)$

(2) $y'=1\cdot(x-1)(x-5)+(x+2)\cdot1\cdot(x-5)+(x+2)(x-1)\cdot1$

$=x^2-6x+5+x^2-3x-10+x^2+x-2=3x^2-8x-7$

(3) $y'=\dfrac{(4x+1)\sqrt{x}-(2x^2+x-1)\cdot(x^{\frac12})'}{x}$

$=\dfrac{(4x+1)\sqrt{x}-(2x^2+x-1)\cdot\frac12\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{2(4x+1)x-(2x^2+x-1)}{2x\sqrt{x}}$

$=\dfrac{8x^2+2x-2x^2-x+1}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{6x^2+x+1}{2x\sqrt{x}}$

(4) $y'=\dfrac{1\cdot(2x-3)^2-x\cdot2(2x-3)\cdot2}{(2x-3)^4}$

$=\dfrac{2x-3-4x}{(2x-3)^3}=\dfrac{-2x-3}{(2x-3)^3}$

(5) $y'=3\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=3\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{3x^2}{(x+1)^4}$

(6) $y=(x^2+3)^{-\frac12}$

$y'=-\dfrac12(x^2+3)^{-\frac32}\cdot2x=-\dfrac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

(7) $y'=2\sqrt{x^2+1}+2x\times\left\{\dfrac12(x^2+1)^{-\frac12}\cdot2x\right\}$

$=2\sqrt{x^2+1}+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{4x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$

(8) $y'=\dfrac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$

(9) 前回と同じ問題 $=\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(10) $y=(x+x^{\frac12})^{\frac12}$

$y'=\dfrac12(x+x^{\frac12})^{-\frac12}\times\left(1+\dfrac12x^{-\frac12}\right)$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\times\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

(11) $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

$y'=\dfrac12(1+x)^{-\frac12}+\dfrac12(1-x)^{-\frac12}\times(-1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$