1　次の関数の第2次導関数，第3次導関数を求めよ。

(1)　$y=x^4-5x^3+8x-2$　(2)　$y=\sin 2x$　(3)　$y=3^x$

(4)　$y=\log(x+1)$　(5)　$y=\dfrac{1}{x+3}$　(6)　$y=(x+1)e^{-x}$

(1) $y'=4x^3-15x^2+8$

$y''=12x^2-30x$

$y'''=24x-30$

(2) $y'=\cos 2x\times 2=2\cos 2x$

$y''=2(-\sin 2x)\times 2=-4\sin 2x$

$y'''=-4\cos 2x\times 2=-8\cos 2x$

(3) $y'=3^x\log 3$

$y''=3^x\log 3\times\log 3$

$=3^x(\log 3)^2$

$y'''=3^x(\log 3)^3$

(4) $y'=\dfrac{1}{x+1}$

$y''=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$

$y'''=-\dfrac{-2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

(5) $y'=\dfrac{-1}{(x+3)^2}$

$y''=-\dfrac{-2(x+3)}{(x+3)^4}=\dfrac{2}{(x+3)^3}$

$y'''=\dfrac{-2\cdot 3(x+3)^2}{(x+3)^6}=\dfrac{-6}{(x+3)^4}$

(6) $y'=e^{-x}+(x+1)e^{-x}\cdot(-1)$

$=-xe^{-x}$

$y''=-e^{-x}+(-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$

$=(x-1)e^{-x}$

$y'''=e^{-x}+(x-1)\cdot e^{-x}(-1)$

$=(2-x)e^{-x}$

2　次の等式が成り立つことを証明せよ。ただし，a，b，k は定数とする。

(1)　$y=ae^{kx}+be^{-kx}$ のとき　$y''=k^2y$

(2)　$y=a\sin kx+b\cos kx$ のとき　$y''=-k^2y$

(1) $y'=ae^{kx}\cdot k+be^{-kx}\cdot(-k)$

$=k(ae^{kx}-be^{-kx})$

$y''=k\{ae^{kx}\cdot k-be^{-kx}\cdot(-k)\}$

$y''=k^2(ae^{kx}+be^{-kx})=k^2y$

(2) $y'=a\cos kx\cdot k+b(-\sin kx)\cdot k$

$=k(a\cos kx-b\sin kx)$

$y''=k\{a(-\sin kx)\cdot k-b\cos kx\cdot k\}$

$y''=-k^2(a\sin kx+b\cos kx)$

$=-k^2y$

3　関数 $f(x)=\log x$ について，次のことを数学的帰納法で証明せよ。

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

(i) $n=1$ のとき

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(x)=(-1)^0\cdot\dfrac{(1-1)!}{x^1}=\dfrac{1}{x}$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{(k-1)!}{x^k}$ と仮定

$n=k+1$ のとき

$f^{(k+1)}(x)=\left\{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot x^{-k}\right\}\dfrac{d}{dx}$

$=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(-k)\cdot x^{-k-1}$

$=(-1)^k\cdot k!\cdot\dfrac{1}{x^{k+1}}$　よって $n=k+1$ のときも成立

(i), (ii) から

すべての自然数 n について成立する。

4 自然数 n に対して，$\dfrac{d^n}{dx^n}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$ が成り立つことを，数学的帰納法で証明せよ。

(i) $n=1$ のとき

$(\cos x)'=-\sin x$ ，　$\dfrac{d}{dx}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ となり成立

(ii) $n=k$ のとき

$\dfrac{d^k}{dx^k}\cos x=\cos\left(x+\dfrac{k}{2}\pi\right)$ と仮定

$n=k+1$ のとき

$\dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\cos x=-\sin\left(x+\dfrac{k}{2}\pi\right)\times 1=-\sin\left(x+\dfrac{k}{2}\pi\right)$

また，

$\cos\left(x+\dfrac{k+1}{2}\pi\right)=\cos\left(x+\dfrac{k}{2}\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x+\dfrac{k}{2}\pi\right)$

よって $n=k+1$ のときも成立

(i),(ii) から すべての自然数 n について成立する

5 次の関数の第 2 次導関数，第 3 次導関数を求めよ。

(1)　$y=x^3-3x^2+2x-1$　(2)　$y=\log(x^2+1)$　(3)　$y=e^x\cos x$

(1) $y'=3x^2-6x+2$

$y''=6x-6$

$y'''=6$

(2) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$y'''=\dfrac{-4x(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\dfrac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

(3) $y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$

$=e^x(\cos x-\sin x)$

$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)$

$=-2e^x\sin x$

$y'''=-2e^x\sin x-2e^x\cos x=-2e^x(\sin x+\cos x)$

6 次の関数の第 2 次導関数，第 3 次導関数を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$　(2)　$y=xe^{2x}$　(3)　$y=x\sin x$

$y=x^{\frac{1}{2}}$

$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y''=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$

$y'''=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

(2) $y'=e^{2x}+xe^{2x}\cdot 2=e^{2x}(1+2x)$

$y''=e^{2x}(1+2x)\cdot 2+e^{2x}\cdot 2$

$=e^{2x}(4x+4)=4e^{2x}(x+1)$

$y'''=4e^{2x}\cdot 2\cdot(x+1)+4e^{2x}\cdot 1$

$=4(2x+3)e^{2x}$

(3) $y'=\sin x+x\cos x$

$y''=\cos x+\cos x+x\cdot(-\sin x)$

$=2\cos x-x\sin x$

$y'''=-2\sin x-(\sin x+x\cos x)$

$y'''=-3\sin x-x\cos x$