テーマ：

平均値の定理①（解説）

平均値の定理①　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x^3-2x$ と，区間 $[0,\ 1]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の曲線上の 2 点 A，B について，直線 AB に平行な曲線の接線を引けるだけ引くとき，その接点の座標を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$　A$(0,\ 0)$，B$(4,\ 2)$　　　(2)　$y=\sin x$　A$(0,\ 0)$，B$(\pi,\ 0)$

$\boxed{3}$ 次の関数と，示された区間について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$　$[1,\ 2]$　　　(2)　$f(x)=\log x$　$[1,\ e^2]$

4 2次関数 $f(x)=px^2+qx+r$ と，区間 $[a,\ b]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を a，b で表せ。

5 関数 $f(x)=x\cos x$ について，開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に $f'(x)=0$ を満たす実数 x が存在することを示せ。

6 (1) $f(x)=2\sqrt{x}$ と区間 $[1,\ 4]$ について，平均値の定理の式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ のとき，$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$ を満たす θ を正の数 a，h で表し，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\theta$ を求めよ。

5 関数 $f(x)=x\cos x$ について，開区間 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ に $f'(x)=0$ を満たす実数 x が存在することを示せ。

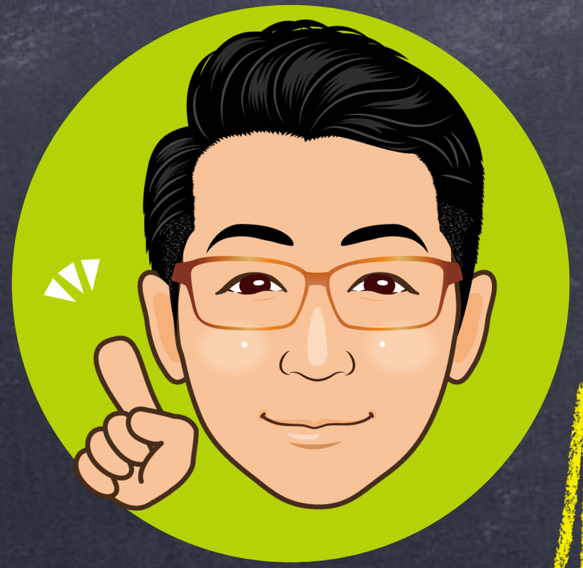
$f(x)$ は $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ で連続であり

$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ で微分可能なので、

平均値の定理より

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}=f'(x),\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

となる x が存在する



確定!!

整理すると

$$\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0}{\frac{\pi}{2}-0}=f'(x),\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$$

よって $f'(x)=0,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

つまり

$f'(x)=0$ を満たす実数 x が

$0<x<\frac{\pi}{2}$ に存在することが示された

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとき，$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$ を満たす θ を正の数 a，h で表し，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\theta$ を求めよ。

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ より $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$ より

$$\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}=-\frac{h}{(a+\theta h)^2}$$

$$a(a+\theta h)^2-(a+h)(a+\theta h)^2=-ha(a+h)$$

$$-h(a+\theta h)^2=-ha(a+h)$$

$$(a+\theta h)^2=a(a+h)$$

$a+\theta h>0$ より

$$a+\theta h=\sqrt{a(a+h)}$$

$$\theta=\frac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}$$

$$\lim_{h\to+0}\theta=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}$$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ のとき，$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$ を満たす θ を正の数 a，h で表し，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\theta$ を求めよ。

$$\lim_{h\to+0}\theta=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{a^2+ah}-a}{h}\times\frac{\sqrt{a^2+ah}+a}{\sqrt{a^2+ah}+a}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{a^2+ah-a^2}{h\left(\sqrt{a^2+ah}+a\right)}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{a}{\sqrt{a^2+ah}+a}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2}+a}$$

$a>0$ より

$$=\frac{a}{a+a}=\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$