テーマ：

積と商の導関数

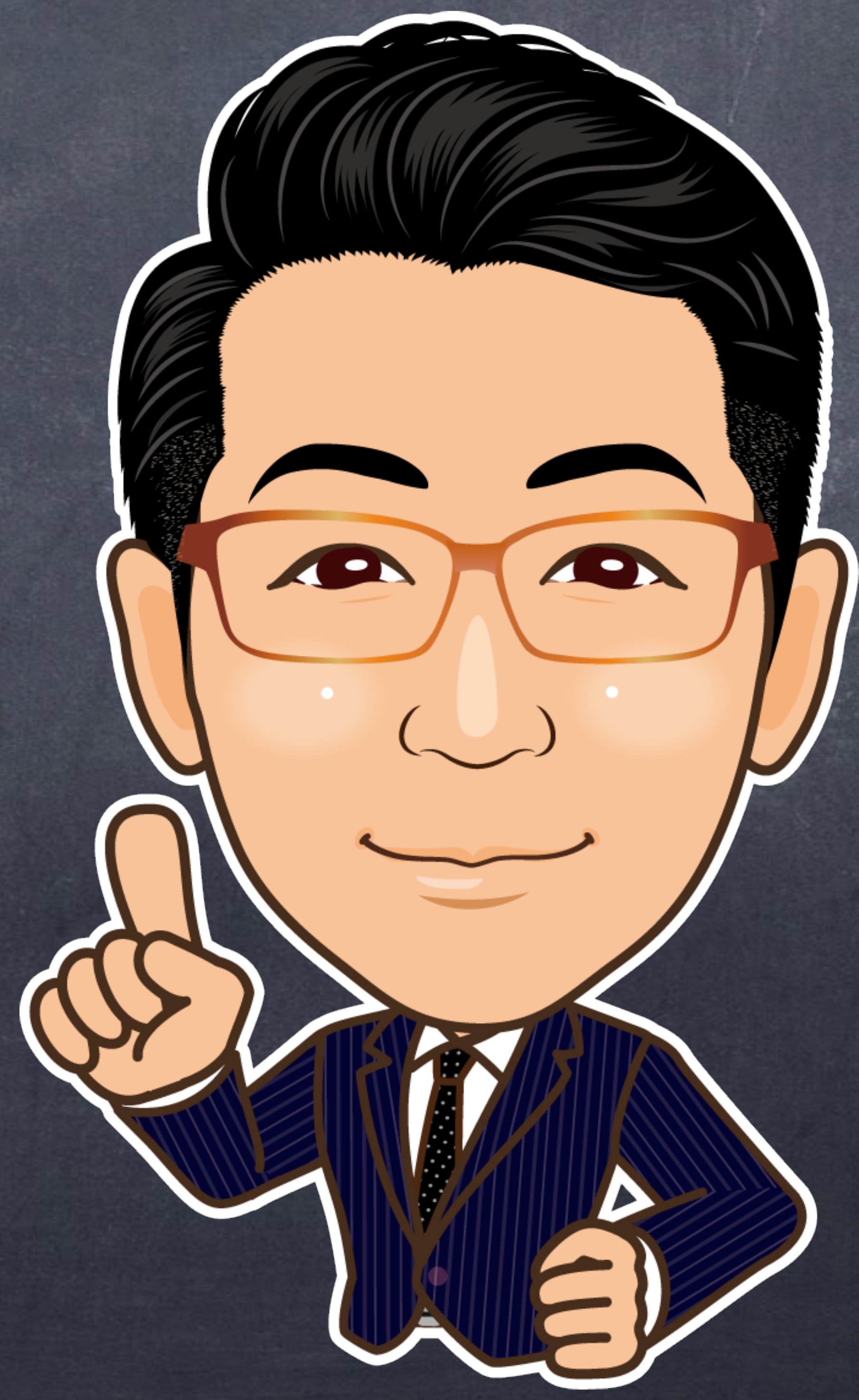
○ 積と商の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ ともに微分可能

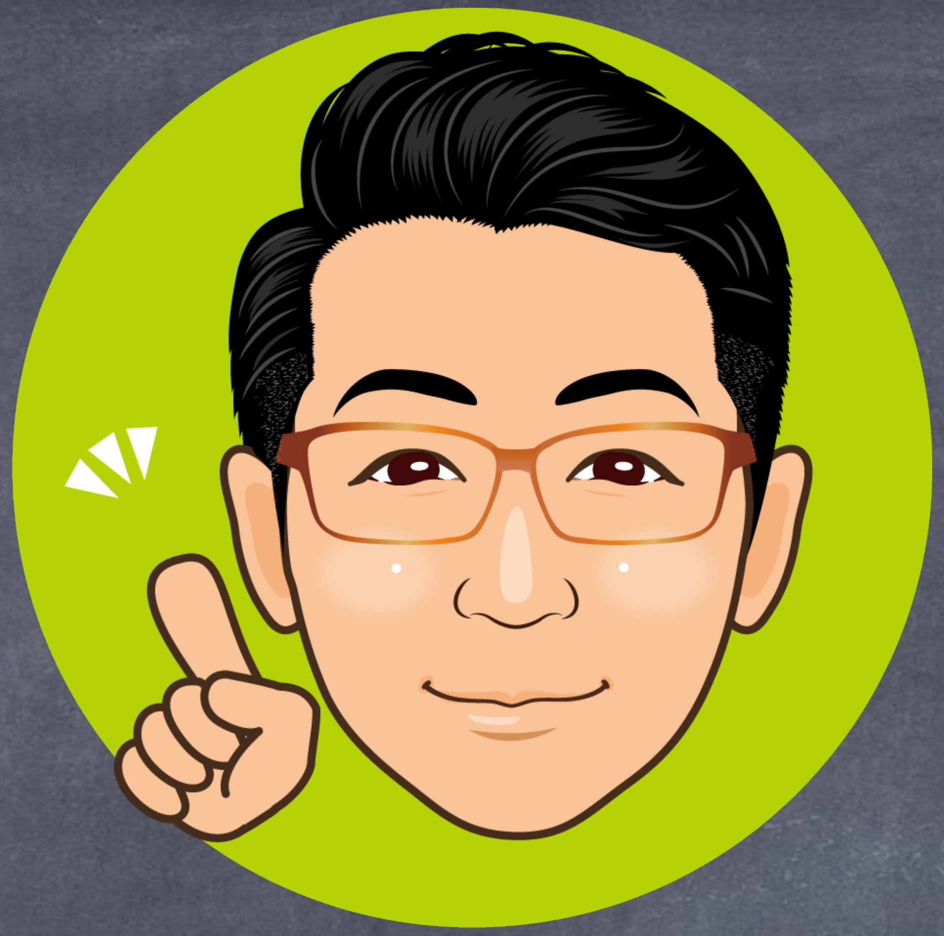
① $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ⟹ 証明する!!

② $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

③ $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$



$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を証明する.

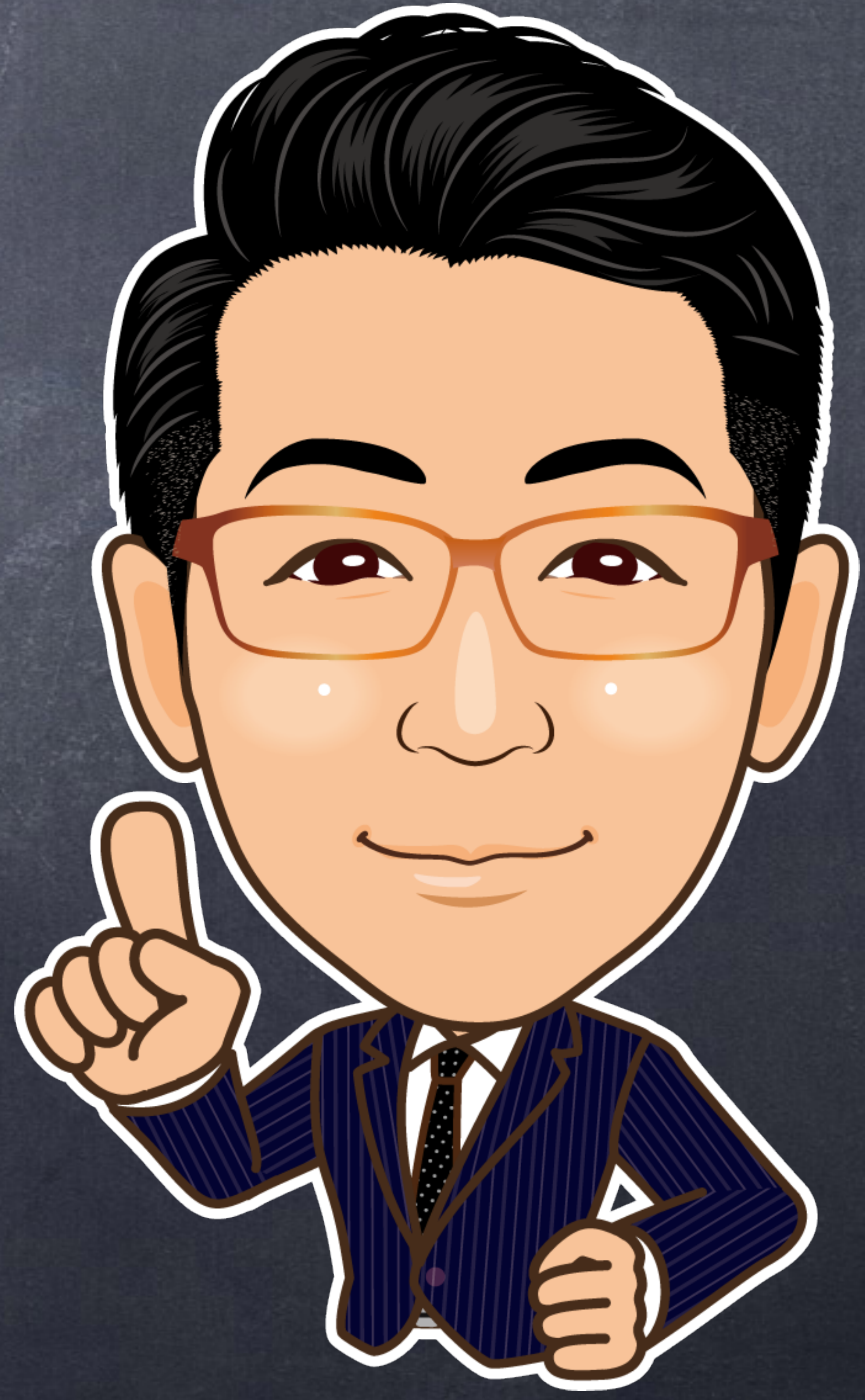


(証) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$



$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

ここで、$f(x)$, $g(x)$は微分可能なので、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

また、$g(x)$は微分可能なので

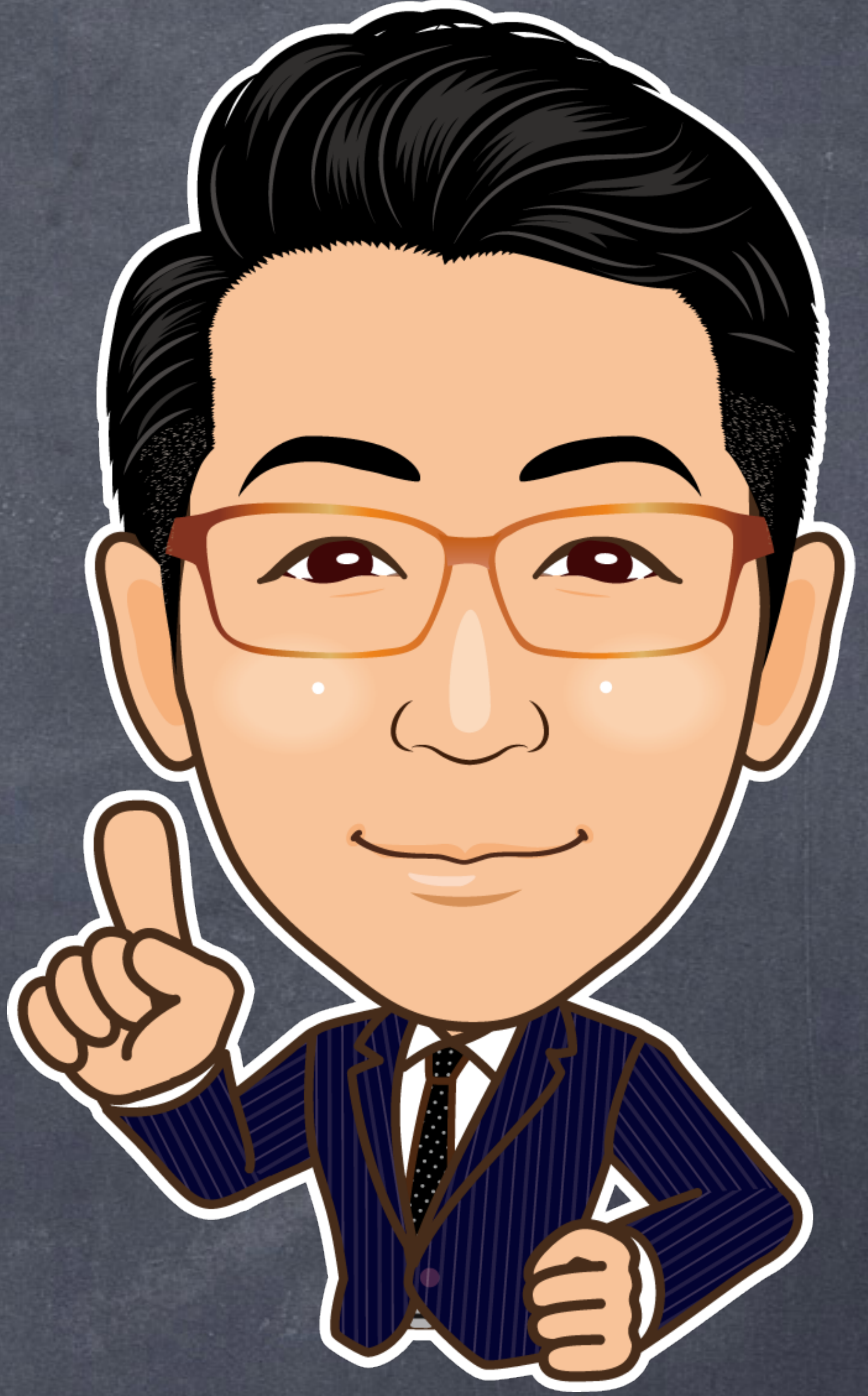
連続である。

したがって

$$\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x) \text{ である}$$

以上より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

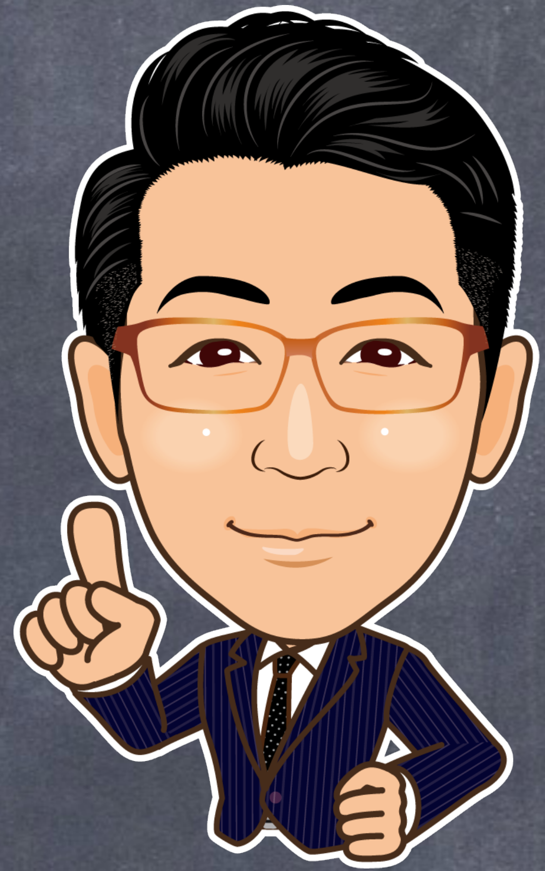


(ex)

(1) $y = (x^3 - 3x)(4x^2 + 5)$

① $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$y' = (3x^2 - 3)(4x^2 + 5) + (x^3 - 3x) \times 8x$



$= 20x^4 - 21x^2 - 15$

③ $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $y = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

$y' = \dfrac{3 \times (x^2 - 1) - 3x \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\dfrac{3x^2 + 3}{(x^2 - 1)^2}$