テーマ：

微分係数と微分可能（解説）

微分係数と微分可能　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ $f(x)=|x|(x+1)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

$\boxed{2}$ 次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$　　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(3)　$f(x)=\sqrt{3x-2}$

$\boxed{3}$ $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

$\boxed{4}$ $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，次の極限値を $f'(a)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+4h)-f(a-h)}{h}$

$\boxed{5}$ 次の関数 $f(x)$ は，$x=0$ で連続でありかつ微分可能でないことを示せ。

$x \fallingdotseq 0$ のとき　$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$f(0)=0$

$\boxed{1}$ $f(x)=|x|(x+1)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|(0+h+1)-|0|(0+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|(h+1)}{h}$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{|h|(h+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to +0}\frac{h(h+1)}{h}=1$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{|h|(h+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}\frac{-h(h+1)}{h}=-1$$

よって $\lim_{h\to 0}\frac{|h|(h+1)}{h}$ は存在しない

すなわち

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない

2 次の関数の導関数を，定義に従って求めよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ (2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ (3) $f(x)=\sqrt{3x-2}$

(2)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right\}$$

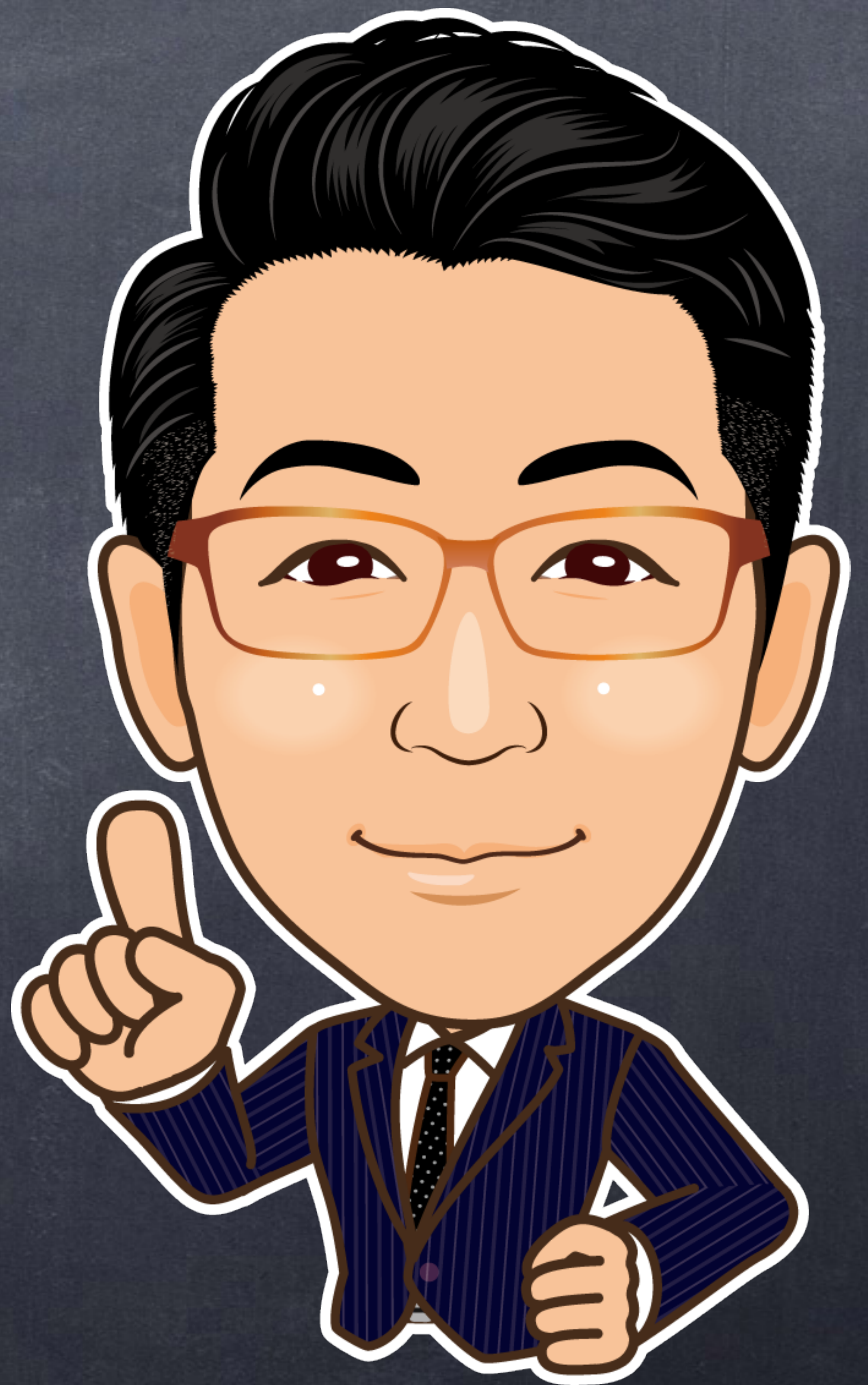
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$$

$$=\frac{-2x}{x^2\cdot x^2}=-\frac{2}{x^3}$$

$$\underline{-\frac{2}{x^3}}$$



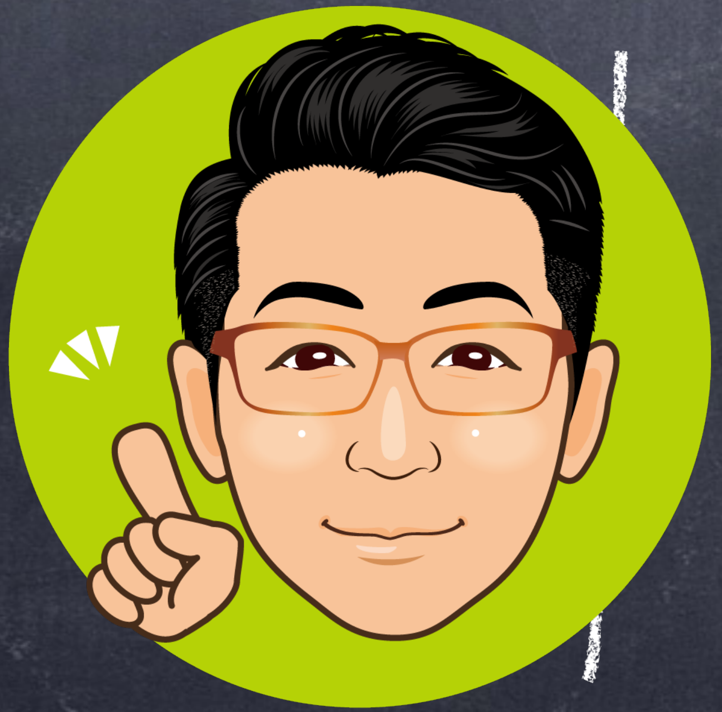
$\boxed{3}$ $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能なので.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$ である.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-3h)}{h}$$

$f'(a)$ を作るためには.
$f(a)$ が必要!!



$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{2\times\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+3\times\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\right\}$$

$$=2\times f'(a)+3\times f'(a)=\underline{\underline{5f'(a)}}$$

5 次の関数 $f(x)$ は，$x=0$ で連続でありかつ微分可能でないことを示せ。

$$x \neq 0 \text{ のとき } \quad f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad f(0)=0$$

$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$ を考える.

$$0 \leqq \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq 1$$

$$0 \leqq |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq |x|$$

$\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ より

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

よって $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ なので $x=0$ で連続

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

$h\to 0$ のとき $\sin\dfrac{1}{h}$ は一定の値に近づかないから

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ の極限はない

したがって $x=0$ で微分可能でない