6－21　グラフの書き方①

1 次の関数のグラフの概形をかけ。ただし，(4) では $\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$，(7) では $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ を用いてよい。

(1)　$y=(x-1)^3(x-3)$

(2)　$y=x+\sqrt{2}\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(3)　$y=e^{-x^2}$

(4)　$y=\frac{\log x}{x}$

(5)　$y=\frac{x^2}{x+1}$

(6)　$y=\log(x^2+1)$

(7)　$y=(x-1)e^x$

(1) $y'=3(x-1)^2(x-3)+(x-1)^3$

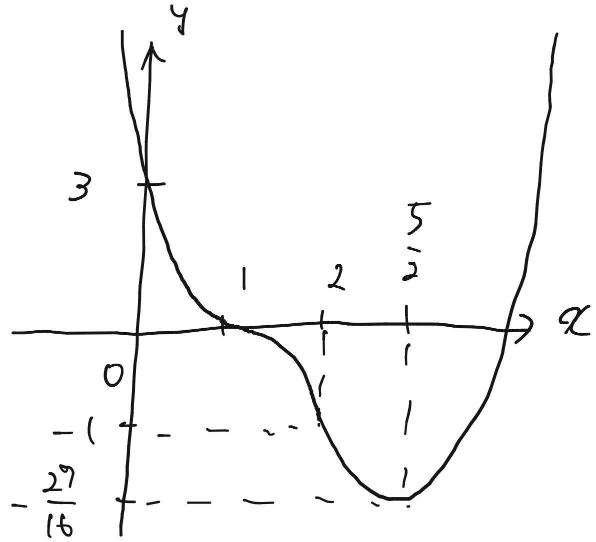
$y'=2(x-1)^2(2x-5)$

$y''=2\{2(x-1)(2x-5)+(x-1)^2\cdot 2\}$

$y''=12(x-1)(x-2)$

$y'=0$, $y''=0$ となるときはそれぞれ $x=1, \frac{5}{2}$, $x=1, 2$

| $x$ | … | 1 | … | 2 | … | $\frac{5}{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | − | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $y''$ | + | 0 | − | 0 | + | + | + |
| $y$ | ↘ | 0 | ↘ | −1 | ↘ | $-\frac{27}{16}$ | ↗ |




$\lim_{x\to\infty} y=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} y=\infty$

(2) $y'=1+\sqrt{2}\cos x$

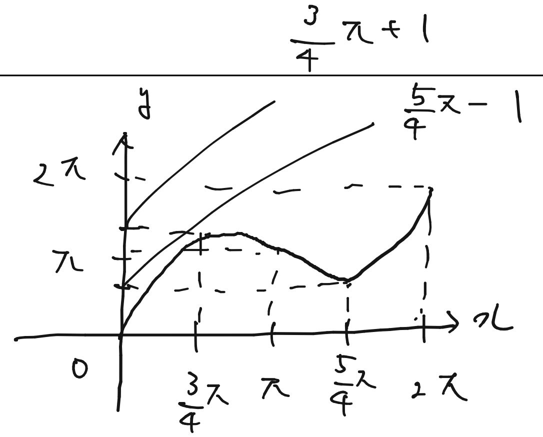
$y''=-\sqrt{2}\sin x$

$0<x<2\pi$ で

$y'=0$ となるとき $x=\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$

$y''=0$ となるとき $x=\pi$

| $x$ | 0 | … | $\frac{3}{4}\pi$ | … | $\pi$ | … | $\frac{5}{4}\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | / | + | 0 | − | − | − | 0 | + | / |
| $y''$ | / | − | − | − | 0 | + | + | + | / |
| $y$ | 0 | ↗ | $\frac{3}{4}\pi+1$ | ↘ | $\pi$ | ↘ | $\frac{5}{4}\pi-1$ | ↗ | $2\pi$ |




(3) $y'=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$

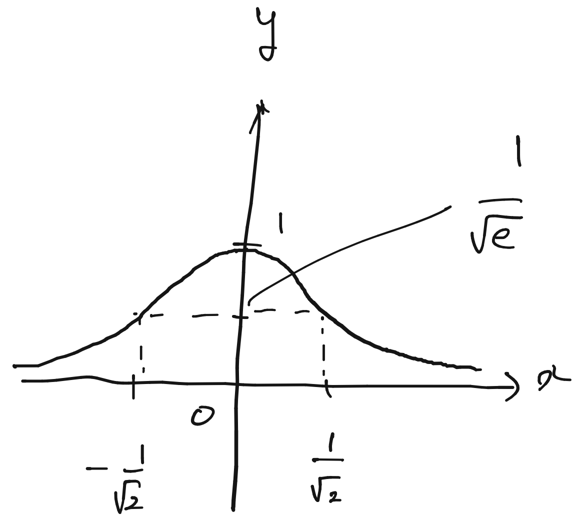
$y''=-2\{1\cdot e^{-x^2}+x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)\}$

$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$y'=0$ となるとき $x=0$

$y''=0$ となるとき $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

| $x$ | … | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | … | 0 | … | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | + | + | 0 | − | − | − |
| $y''$ | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $y$ | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ↗ | 1 | ↘ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | ↘ |




$\lim_{x\to\infty} y=0$, $\lim_{x\to-\infty} y=0$

(4) $x>0$,

$y'=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\log x\cdot 1}{x^2}$

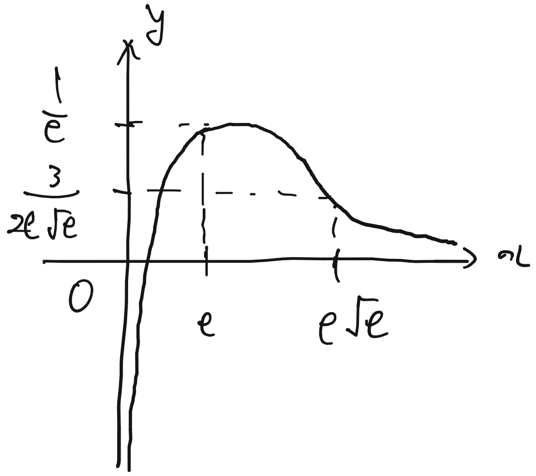
$y'=\frac{1-\log x}{x^2}$

$y''=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}$

$y''=\frac{2\log x-3}{x^3}$

$y'=0$ となる $x=e$，$y''=0$ となる $x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

| $x$ | 0 | … | $e$ | … | $e\sqrt{e}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | / | + | 0 | − | − | − |
| $y''$ | / | − | − | − | 0 | + |
| $y$ | / | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ | ↘ |




$\lim_{x\to+0} y=-\infty$，$\lim_{x\to\infty} y=0$

(5) $x+1\neq 0$ $(x\neq -1)$

$y=x-1+\frac{1}{x+1}$

$y'=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$y''=\frac{+2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$

$y'=0$ となる $x=0,\ -2$

| $x$ | … | −2 | … | −1 | … | 0 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | − | / | − | 0 | + |
| $y''$ | − | − | − | / | + | + | + |
| $y$ | ↗ | −4 | ↘ | / | ↘ | 0 | ↗ |

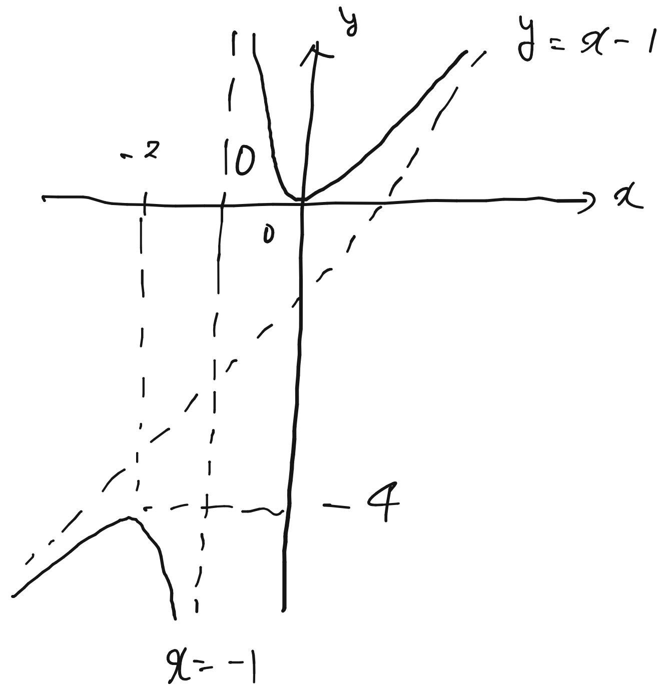
$\lim_{x\to-1+0} y=\infty$，$\lim_{x\to-1-0} y=-\infty$

$\lim_{x\to\infty}\{y-(x-1)\}=0$，$\lim_{x\to-\infty}\{y-(x-1)\}=0$

以上より

$y=x-1$，$x=-1$ が

漸近線となる

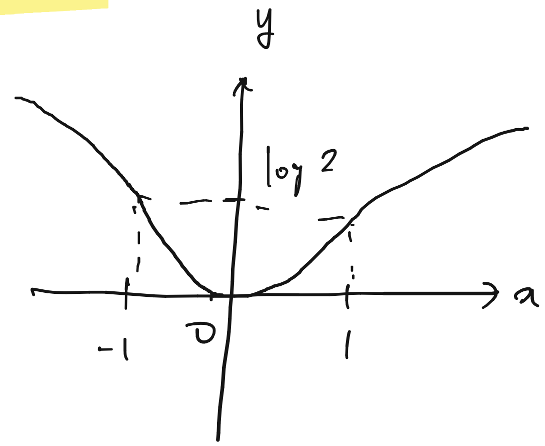



(6) $y'=\frac{2x}{x^2+1}$

$y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ となる $x=0$，$y''=0$ となる $x=\pm 1$

| $x$ | … | −1 | … | 0 | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $y''$ | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| $y$ | ↘ | log2 | ↘ | 0 | ↗ | log2 | ↗ |




$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to-\infty} y=\infty$

(ア) $y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

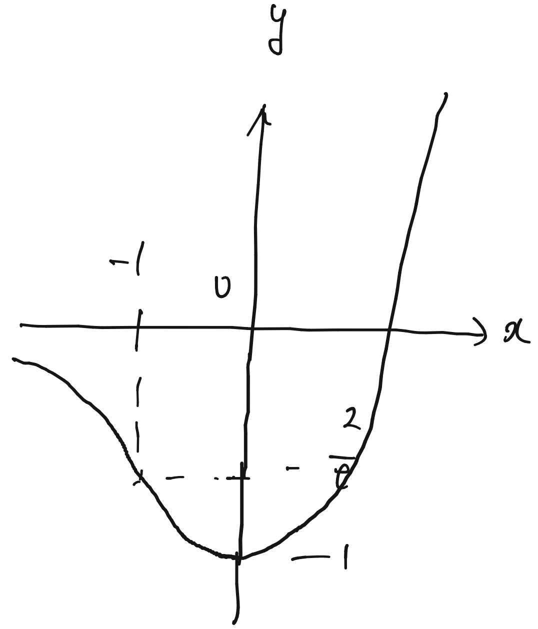
$y'' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$y'=0$ とすると $x=0$, $y''=0$ とすると $x=-1$

| $x$ | … | $-1$ | … | $0$ | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | ↘ | $-\frac{2}{e}$ | ↘ | $-1$ | ↗ |

$\lim_{x\to\infty} y = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} y = 0$




(イ) $x^2-3 \neq 0$, $x \neq \pm\sqrt{3}$

$$y' = \frac{3x^2\cdot(x^2-3) - x^3\cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4-9x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}$$

$$y'' = \frac{(4x^3-18x)(x^2-3)^2 - (x^4-9x^2)\cdot 2(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-3)^4} = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}$$

$y'=0$ とすると $x=0, \pm 3$, $y''=0$ とすると $x=0$.

| $x$ | … | $-3$ | … | $-\sqrt{3}$ | … | $0$ | … | $\sqrt{3}$ | … | $3$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | / | $-$ | $0$ | $-$ | / | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | / | $+$ | $0$ | $-$ | / | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | ↗ | $-\frac{9}{2}$ | ↘ | / | ↘ | $0$ | ↘ | / | ↘ | $\frac{9}{2}$ | ↗ |

$y = x + \frac{3x}{x^2-3}$ より $\lim_{x\to\infty}(y-x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}(y-x)=0$

$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0} y = \infty$, $\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} y = -\infty$, $\lim_{x\to\sqrt{3}+0} y = \infty$, $\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y = -\infty$

以上より、漸近線は 直線 $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=x$

2 次の関数のグラフの概形をかけ。

(1) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$　(2) $y=\frac{4x}{x^2+2}$

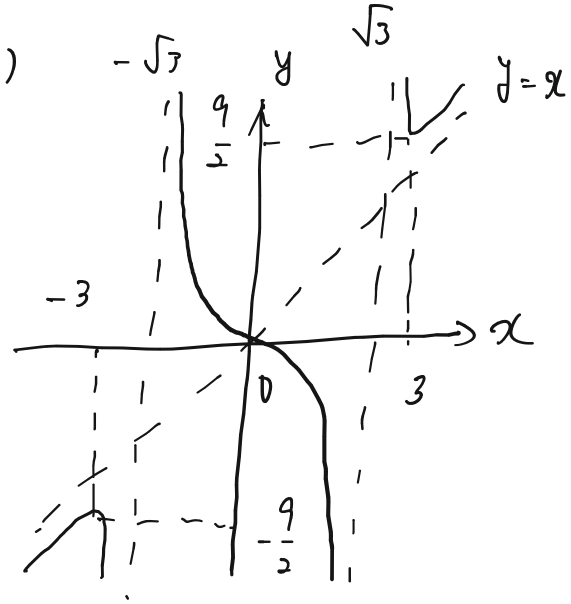
(3) $y=(x-1)\sqrt{x+2}$　(4) $y=|x-1|\sqrt{x}$

(2) $y' = 4\cdot\frac{x^2+2-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = -\frac{4(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$ , $y'' = \frac{8x(x^2-6)}{(x^2+2)^3}$

$y'=0$ となるとき $x=\pm\sqrt{2}$ , $y''=0$ となるとき $x=0,\ \pm\sqrt{6}$

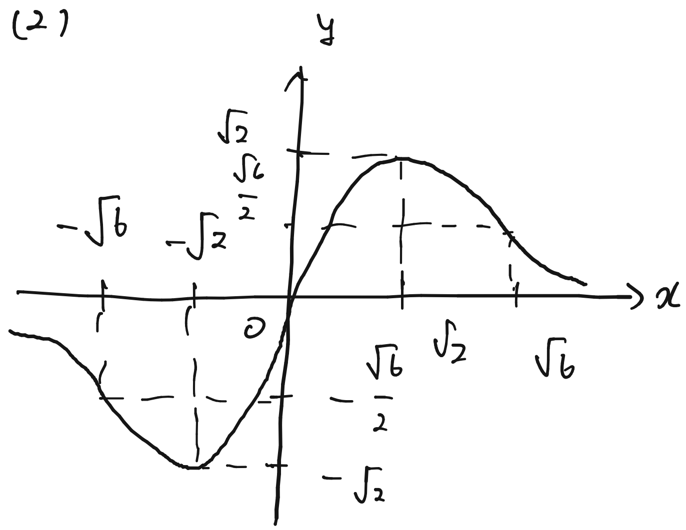
| $x$ | … | $-\sqrt{6}$ | … | $-\sqrt{2}$ | … | $0$ | … | $\sqrt{2}$ | … | $\sqrt{6}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ | ↘ | $-\sqrt{2}$ | ↗ | $0$ | ↗ | $\sqrt{2}$ | ↘ | $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | ↘ |

(1)




$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to-\infty} y = 0$

(2)



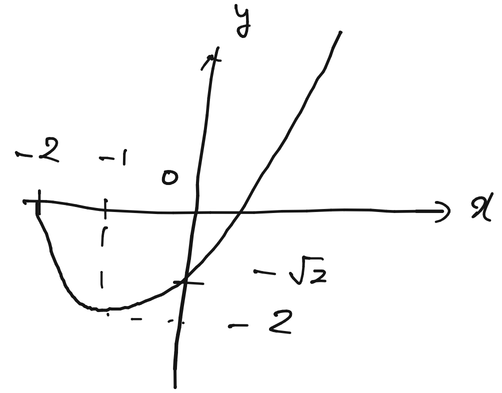

(3) $x+2 \geqq 0$ $(x \geqq -2)$

$x>-2$ のとき

$y' = \sqrt{x+2} + (x+1)\frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}}$ , $y'' = \frac{3(x+3)}{4(x+2)\sqrt{x+2}}$

$y'=0$ となるとき $x=-1$ , $x>-2$ のとき $y''>0$

| $x$ | $-2$ | … | $-1$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | / | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | / | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ |




$\lim_{x\to\infty} y = \infty$

(4) $x \geqq 0$

$x>1$ のとき $y=(x-1)\sqrt{x}$

$y' = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

$y'' = \frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$

$0<x<1$ のとき

$y = -(x-1)\sqrt{x}$

$y' = -\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

$y'' = -\frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$

$x>1$ のとき $y'>0,\ y''>0$

$0<x<1$ のとき $y'=0$ のとき $x=\frac{1}{3}$ , $y''<0$

| $x$ | $0$ | … | $\frac{1}{3}$ | … | $1$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | / | $+$ | $0$ | $-$ | / | $+$ |
| $y''$ | / | $-$ | $-$ | $-$ | / | $+$ |
| $y$ | $0$ | ↗ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | $0$ | ↗ |

$\lim_{x\to\infty} y = \infty$