

1 関数 $y = x^{2x}$ ($x > 0$) を微分せよ。

$$\frac{d}{dx} \log y = 2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$x > 0$ かつ $x^{2x} > 0$ である

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = 2 \log x + 2$$

両辺に自然対数 \log をとる。

$$\log y = 2x \log x$$

両辺 x で微分する

$$\frac{dy}{dx} = 2(\log x + 1) \cdot x^{2x}$$

2 対数微分法により、次の関数を微分せよ。ただし、(3)の a は定数とする。

(1) $y = \frac{(x+3)^4}{(x+1)^2(x+2)^3}$

(2) $y = \sqrt[4]{(x+1)(x^2+2)}$

(3) $y = \frac{x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

(4) $y = x^{\sin x}$ ($x > 0$)

(5) $y = \frac{1}{x^{\log x}}$ ($x > 0$)

(6) $y = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$)

(1) 両辺の絶対値の自然対数 \log をとる。

$$\log |y| = 4 \log |x+3| - 2 \log |x+1| - 3 \log |x+2|$$

x で微分する

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{4}{x+3} - \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{-x^2 - 10x - 13}{(x+3)(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+3)^4}{(x+1)^2(x+2)^3} \times \frac{-x^2 - 10x - 13}{(x+3)(x+1)(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+3)^3(x^2+10x+13)}{(x+1)^3(x+2)^4}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数 \log をとる。

$$\log |y| = \frac{1}{4} \log |x+1| + \frac{1}{4} \log |x^2+2|$$

x で微分する

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{x^2+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[4]{(x+1)(x^2+2)} \cdot \frac{3x^2+2x+2}{4(x+1)(x^2+2)} = \frac{3x^2+2x+2}{4 \sqrt[4]{(x+1)^3(x^2+2)^3}}$$

(3) 両辺の絶対値の自然対数 \log をとる。

$$\log |y| = 2 \log |x| - \frac{3}{2} \log |a^2+x^2|$$

x で微分する

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{a^2+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{3x}{a^2+x^2} \right) = \frac{x(2a^2-x^2)}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$$

(4) $x > 0$ である。 $x^{\sin x} > 0$

両辺の自然対数 \log をとる

$$\log y = \sin x \log x$$

x で微分する

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \cos x \log x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

(5) $x > 0$ であれば $\frac{1}{x \log x} > 0$

両辺の自然対数を ε とおく。

$$\log y = \log 1 - \log x \cdot \log x = -(\log x)^2$$

x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = -2 \log x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log x} \left(-\frac{2 \log x}{x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \log x}{x^{\log x + 1}}$$

(6) $x > 0$ であれば $x^{\frac{1}{x}} > 0$
両辺の自然対数を ε とおく。

$$\log y = \frac{1}{x} \log x$$

x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{x} - 2} (1 - \log x)$$

3 対数微分法により、次の関数を微分せよ。ただし、 a は定数とする。

(1) $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$

(2) $y = \frac{(1+x)^3(1-2x)}{(1-x)(1+2x)^3}$

~~(3) $y = \sqrt[4]{(x+1)(x^2+2)}$~~

(4) $y = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

(1) 両辺の絶対値の自然対数を ε とおく。

$$\log |y| = 2 \log |x+1| - 3 \log |x+2| - 4 \log |x+3|$$

x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{-5x^2 - 14x - 5}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(x+1)(5x^2 + 14x + 5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数を ε とおく

$$\log |y| = 3 \log |1+x| + \log |1-2x| - \log |1-x| - 3 \log |1+2x|$$

x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{3}{1+x} + \frac{-2}{1-2x} - \frac{-1}{1-x} - 3 \cdot \frac{2}{1+2x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{2(4x^2 - 3x + 2)}{(1+x)(1+2x)(1-2x)(1-x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(1+x)^2(4x^2 - 3x + 2)}{(1-x)^2(1+2x)^4}$$

(4) 両辺の絶対値の自然対数を ε とおく

$$\log |y| = \log |x| - \frac{3}{2} \log |a^2 + x^2|$$

x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{a^2 + x^2} = \frac{a^2 - 2x^2}{x(a^2 + x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{x(a^2 + x^2)} \times \frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^5}}$$