1 方程式 $x^2+2x+y^2=1$ で定められる x の関数 y について，$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

両辺をxで微分

$2x+2+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-2(x+1)$

$y\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+1}{y}$

2 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y^2=16x$ (2) $4x^2+y^2=1$

(3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ (4) $xy=1$

(1) 両辺をxで微分

$2y\cdot\frac{dy}{dx}=16$

$y\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=\frac{8}{y}$

(2) 両辺をxで微分

$8x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$2y\frac{dy}{dx}=-8x$

$y\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{y}$

(3) 両辺をxで微分

$\frac{2x}{4}-\frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$y\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=\frac{9x}{4y}$

(4) $xy=1$

$\frac{d}{dx}(xy)=\frac{d}{dx}1$

$\frac{d}{dx}x\cdot y+x\cdot\frac{d}{dx}y=0$

$y+x\cdot1\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$xy=1$ より $x\neq0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

3 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2-xy-y^2=1$ (2) $x^3-xy^2+y^3=1$

(3) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=1$ (4) $\sin x-\cos y=1$

(5) $x=\cos(x+y)$

(1) 両辺をxで微分

$2x-\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right)-2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$2x-y-(x+2y)\frac{dy}{dx}=0$

$x+2y\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+2y}$

(2) 両辺をxで微分

$3x^2-\left(y^2+x\cdot2y\cdot\frac{dy}{dx}\right)$

$+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$3x^2-y^2+(-2xy+3y^2)\frac{dy}{dx}=0$

$-2xy+3y^2\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-3x^2}{-2xy+3y^2}$

(3) 両辺をxで微分

$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$y^{-\frac{2}{3}}\frac{dy}{dx}=-x^{-\frac{2}{3}}$

$x\neq0,\ y\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$

(4) 両辺をxで微分

$\cos x-(-\sin y)\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\sin y\neq0$ のとき

$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin y}$

(5) 両辺をxで微分

$$1 = -\sin(x+y)\cdot\left(1 + 1\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

$$1 = -\sin(x+y) - \sin(x+y)\frac{dy}{dx}$$

$\sin(x+y) \neq 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-\sin(x+y)}{\sin(x+y)}$$

4 次の方程式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。ただし，y を用いて表してもよい。

(1)　$y^2 = 8x$　　(2)　$x^2 + y^2 = 2$　　(3)　$\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{2} = 1$　　(4)　$2xy - 3 = 0$

(1) 両辺をxで微分

$$2y\cdot\frac{dy}{dx} = 8$$

$y \neq 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}$$

(2) 両辺をxで微分

$$2x + 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$y \neq 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(3) 両辺をxで微分

$$\frac{2x}{3} - 2y\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$y \neq 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y}$$

(4) 両辺をxで微分

$$2\left(y + x\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$x \neq 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

5 方程式 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ で定められる x の関数 y について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ をそれぞれ x と y を用いて表せ。ただし，$y \neq 0$ とする。

〈ポイント〉

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

両辺をxで微分

$$\frac{2x}{4} - \frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$y \neq 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y}$$

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{9x}{4y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{x}{y}$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{1\cdot y - x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{y - x\cdot\frac{9x}{4y}}{y^2} = -\frac{81}{4y^3}$$