6－20　曲線の凹凸

1 次の曲線の凹凸を調べよ。また，変曲点があればその座標を求めよ。

(1)　$y=x^3-6x^2+9$　　(2)　$y=\sin x\ (0<x<2\pi)$

(3)　$y=2xe^x$　　(4)　$y=x^2-\frac{2}{x}$　　(5)　$y=\frac{x^2+1}{x+1}$

(1) $y'=3x^2-12x$

$y''=6x-12$

$y''=0$ とすると，$x=2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y		-7	

$x<2$ で上に凸，$x>2$ で下に凸

変曲点 $(2,-7)$

(2) $y'=\cos x$

$y''=-\sin x$

$y''=0$ とすると，$x=\pi$

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
y''	/	$-$	0	$+$	/
y	/		0		/

$0<x<\pi$ で上に凸，$\pi<x<2\pi$ で下に凸

変曲点 $(\pi, 0)$

(3) $y'=2e^x+2x\cdot e^x$

$=2e^x(1+x)$

$y''=2e^x(1+x)+2e^x\cdot 1$

$=2e^x(2+x)$

$y''=0$ とすると，$x=-2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y		$-\frac{4}{e^2}$	

$x<-2$ で上に凸

$x>-2$ で下に凸

変曲点 $\left(-2, -\frac{4}{e^2}\right)$

(4) $x\neq 0$

$y'=2x+\frac{2}{x^2}$

$y''=2-\frac{4}{x^3}=\frac{2(x^3-2)}{x^3}$

$y''=0$ とすると $x=\sqrt[3]{2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$
y''	$+$	/	$-$	0	$+$
y		/		0	

$x<0$，$\sqrt[3]{2}<x$ で下に凸

$0<x<\sqrt[3]{2}$ で上に凸

変曲点 $(\sqrt[3]{2}, 0)$

(5) $x+1\neq 0$ $(x\neq -1)$

$y=x-1+\frac{2}{x+1}$

$y'=1-\frac{2}{(x+1)^2}$

$y''=4(x+1)^{-3}$

$y''=\frac{4}{(x+1)^3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y''	$-$	/	$+$
y		/	

$x<-1$ で上に凸

$x>-1$ で下に凸

変曲点なし

２ 次の曲線の凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(1) $y=x^3-3x^2-12x+1$　(2) $y=x^4-6x^2+8x+10$　(3) $y=x+\dfrac{1}{x}$

(4) $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$　(5) $y=\log(1+x^2)$　(6) $y=(x^2-1)e^{-x}$

(1) $y'=3x^2-6x-12$

$y''=6x-6$

$y''=0$ とすると $x=1$

$x<1$ のとき $y''<0$

$x>1$ のとき $y''>0$

また，$x=1$ のとき $y=-13$

$x<1$ で 上に凸
$x>1$ で 下に凸
，変曲点 $(1,-13)$

(2) $y'=4x^3-12x+8$

$y''=12x^2-12$
$=12(x+1)(x-1)$

$y''=0$ とすると $x=\pm1$

$x<-1,\ 1<x$ のとき $y''>0$

$-1<x<1$ のとき $y''<0$

$x=-1$ のとき $y=-3$

$x=1$ のとき $y=13$

$x<-1,\ 1<x$ のとき 下に凸
$-1<x<1$ のとき 上に凸

変曲点 $(-1,-3),\ (1,13)$

(3) $x\neq0$

$y'=1-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}$

$x<0$ のとき $y''<0$

$x>0$ のとき $y''>0$

$x<0$ のとき 上に凸
$x>0$ のとき 下に凸

変曲点なし

(4) $x^3-1\neq0,\ x\neq1$　$y''=0$ とすると $x=0,\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$y=1+\dfrac{1}{x^3-1}$

$y'=-\dfrac{3x^2}{(x^3-1)^2}$

$y''=\dfrac{6x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	/	$+$
y		$\frac{1}{3}$		0		/	

$x<-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ 0<x<1$ のとき 上に凸

$-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}<x<0$ のとき 下に凸

変曲点
$(0,0)$
$\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(5) $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$y''=-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(1+x^2)^2}$

$y''=0$ とすると $x=\pm1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y		$\log 2$		$\log 2$	

$x<-1,\ 1<x$ のとき 上に凸

$-1<x<1$ のとき 下に凸

変曲点 $(-1,\log2),\ (1,\log2)$

(6) $y'=2xe^{-x}+(x^2-1)e^{-x}\cdot(-1)$

$y'=(-x^2+2x+1)e^{-x}$

$y''=(-2x+2)e^{-x}+(-x^2+2x+1)e^{-x}\cdot(-1)$

$y''=(x^2-4x+1)e^{-x}$

$y''=0$ とすると $x=2\pm\sqrt{3}$

x	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

$x<2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}<x$ のとき 下に凸

$2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ のとき 上に凸

変曲点 $\left(2-\sqrt{3},\ (6-4\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}}\right),\ \left(2+\sqrt{3},\ (6+4\sqrt{3})e^{-2-\sqrt{3}}\right)$