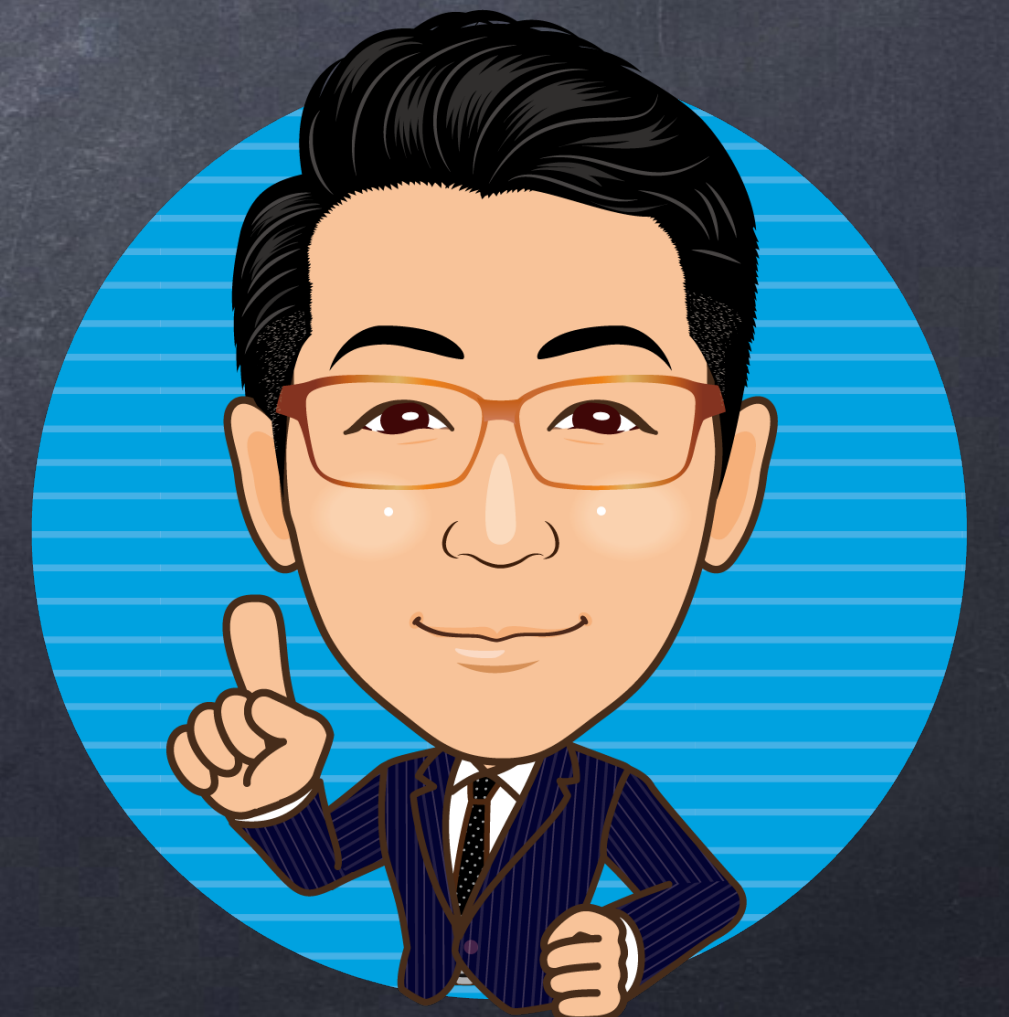


テーマ：  
媒介変数と導関数（解説）



1  $x$  の関数  $y$  が,  $t$  を媒介変数として, 次の式で表されるとき,  $\frac{dy}{dx}$  を  $t$  の関数として表せ。

(1)  $x = t - 2, y = 2t^2$

(2)  $x = t^2 - t + 1, y = t^3 - t - 1$

(3)  $x = \sin 2t, y = \cos t$

(4)  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$

2  $x$  の関数  $y$  が,  $t$  を媒介変数として, 次の式で表されるとき,  $\frac{dy}{dx}$  を  $t$  の関数として表せ。

(1)  $x = t + \frac{1}{t}, y = t - \frac{1}{t}$

(2)  $x = \cos^3 t, y = 2\sin^3 t$

(3)  $x = \sqrt{1 - t^2}, y = t^2 + 1$

(4)  $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = \frac{2t}{1 + t^2}$

(5)  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$

3  $x$  の関数  $y$  が,  $t$  を媒介変数として, 次の式で表されるとき,  $\frac{dy}{dx}$  を  $t$  の関数として表せ。

(1)  $x=t+1, y=2t-1$

(2)  $x=\sqrt{1-t^2}, y=t^2+1$

(3)  $x=\sin t, y=\cos 2t+1$

(4)  $x=t+\sin t, y=1+\cos t$

4  $x=\frac{1+t^2}{1-t^2}, y=\frac{2t}{1-t^2}$  のとき,  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$  をそれぞれ  $t$  の関数で表せ。

5  $x$  の関数  $y$  が媒介変数  $\theta$  を用いて  $x=1-\cos\theta, y=\theta-\sin\theta$  と表されているとき

(1)  $\frac{dy}{dx}$  と  $\frac{d^2y}{dx^2}$  をそれぞれ  $\theta$  で表せ。

(2)  $\tan\frac{\theta}{2}=2$  のとき  $\frac{dy}{dx}$  と  $\frac{d^2y}{dx^2}$  の値をそれぞれ求めよ。

4  $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ ,  $y = \frac{2t}{1-t^2}$  のとき,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  をそれぞれ  $t$  の関数で表せ。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (1-t^2) - (1+t^2) \cdot (-2t)}{(1-t^2)^2}$$

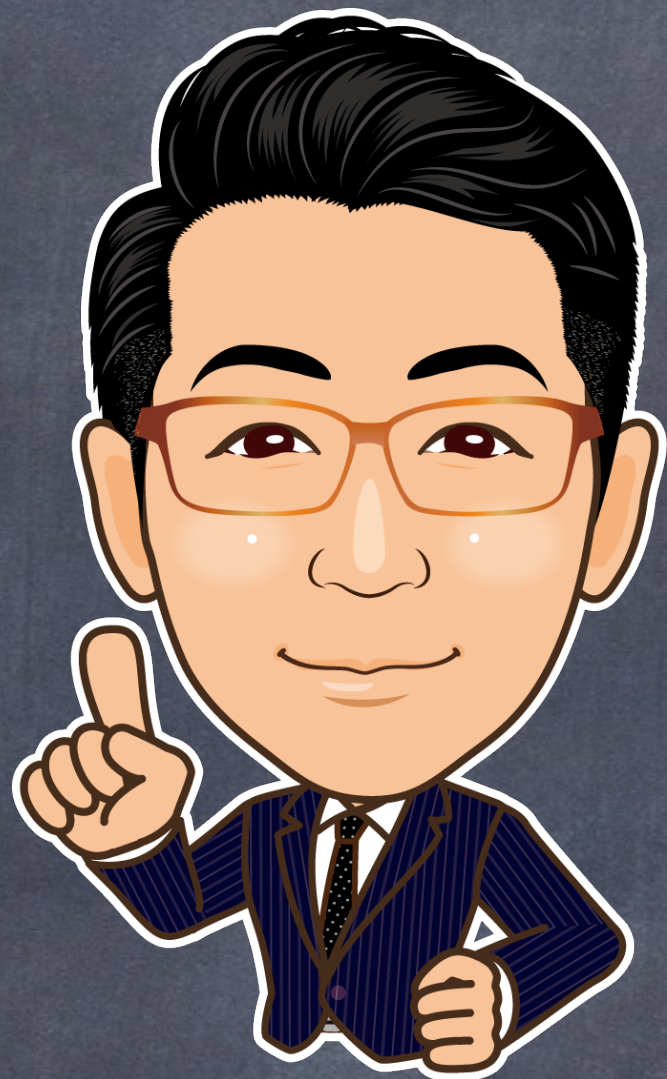
$4t$

$$= \frac{4t}{(1-t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1-t^2) - 2t - (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2+2t^2}{(1-t^2)^2}$$

$t \neq 0$  のとき

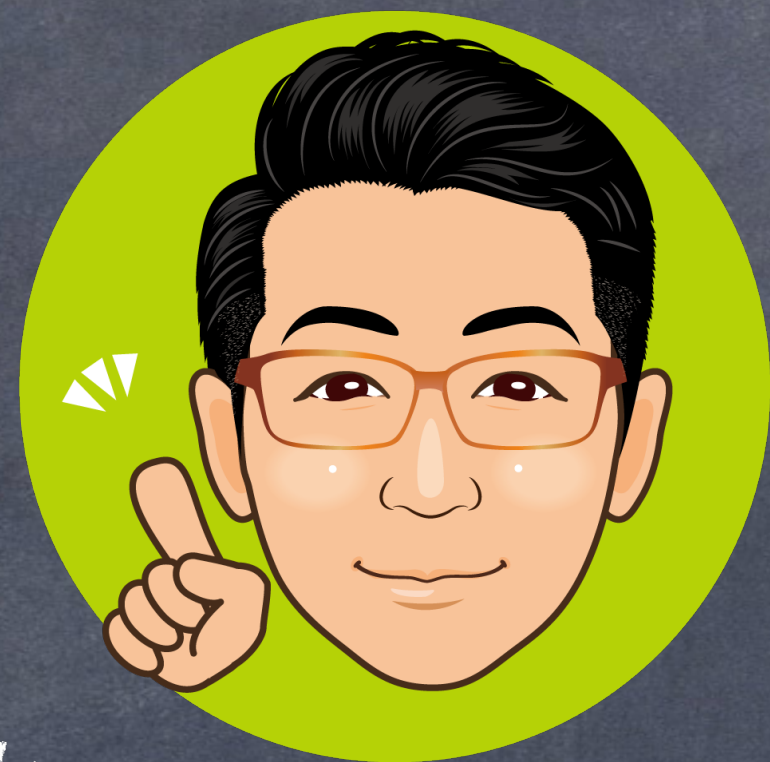
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+2t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+t^2}{2t}$$

4  $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ ,  $y = \frac{2t}{1-t^2}$  のとき,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  をそれぞれ  $t$  の関数で表せ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+t^2}{2t}$$



$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{da} \cdot \frac{dy}{da} \\ &= \frac{d}{da} \left( \frac{1+t^2}{2t} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot \frac{dt}{da} \left( \frac{1+t^2}{2t} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{1+t^2}{2t} \right) \cdot \frac{1}{\frac{da}{dt}}$$

$$= \frac{2t \cdot (2t) - (1+t^2) \cdot 2}{(2t)^2} \cdot \frac{(1-t^2)^2}{4t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{(1-t^2)^3}{8t^3}$$

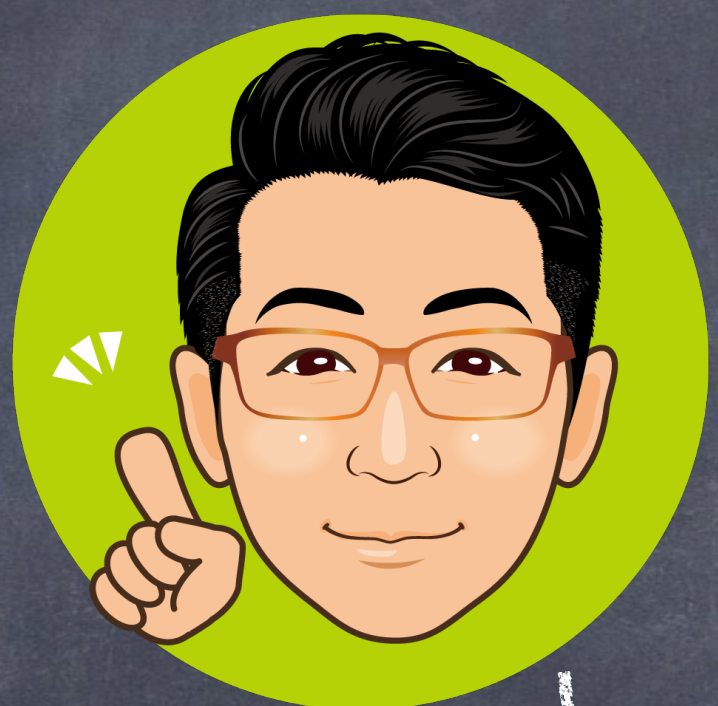
5  $x$  の関数  $y$  が媒介変数  $\theta$  を用いて  $x=1-\cos\theta$ ,  $y=\theta-\sin\theta$  と表されているとき

(1)  $\frac{dy}{dx}$  と  $\frac{d^2y}{dx^2}$  をそれぞれ  $\theta$  で表せ。

(2)  $\tan\frac{\theta}{2}=2$  のとき,  $\frac{dy}{dx}$  と  $\frac{d^2y}{dx^2}$  の値をそれぞれ求めよ。

(2) (1) より  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin^3\theta}$

$\tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \cdot \tan\theta$



$$\cos\theta = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{4}{3}$$

$\sin\theta = \cos\theta \cdot \tan\theta$

$\sin\theta = \frac{4}{5}$

より

代入!!