1 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-5x+a}{x-1}$ が $x=2$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。また，このとき，$f(x)$ の極値を求めよ。

定義域 $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-1)-(x^2-5x+a)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x+5-a}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ が $x=2$ で極値をとるためには

$f'(2)=0$

$f'(2) = 5-a = 0$

$a=5$

$a=5$ のとき

$f(x)=\dfrac{x^2-5x+5}{x-1}$, $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$ とすると $x=0, 2$

x	…	0	…	1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	/	−	0	+
$f(x)$	↗		↘	/	↘		↗

$a=5$ のとき たしかに $x=2$ で極値をとる

また，

$x=0$ のとき 極大値 -5

$x=2$ のとき 極小値 -1

2 $a \neq 0$ とする。関数 $f(x)=x+\dfrac{2a}{x}$ の極小値が 2 となるように，定数 a の値を定めよ。

定義域 $x \neq 0$

$$f'(x) = 1-\frac{2a}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-2a}{x^2}$$

(i) $a<0$ のとき $f'(x)>0$ となり 極値をもたない

(ii) $a>0$ のとき $f'(x)=0$ とすると

$x=\pm\sqrt{2a}$

x	…	$-\sqrt{2a}$	…	0	…	$\sqrt{2a}$	…
$f'(x)$	+	0	−	/	−	0	+
$f(x)$	↗		↘	/	↘		↗

$x=\sqrt{2a}$ のとき 極小値 2 をとればよい。

$f(\sqrt{2a}) = \sqrt{2a} + \dfrac{2a}{\sqrt{2a}} = 2\sqrt{2a}$

$2\sqrt{2a} = 2$，$a=\frac{1}{2}$ これは $a>0$ をみたす

$a=\dfrac{1}{2}$

3 関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2-1}$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$x^2-1 \neq 0$ から

$x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+2ax+1}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ が極値をもつためには 2次方程式 $x^2+2ax+1=0$ が 異なる2つの実数解をもち，その解が 1または-1でない

$x^2+2ax+1=0$ の判別式 D とする

$D/4 = a^2-1$　　$a^2-1>0 \iff a<-1,\ 1<a$

また $1+2a+1 \neq 0$，$1-2a+1 \neq 0$　　$a \neq \pm 1$

よって

$a<-1,\ 1<a$

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+2}$ が $x=1$ で極小値 -1 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

また，$f(x)$ の極大値を求めよ。

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2+2)-(ax^2+bx+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\frac{bx^2-2(2a-1)x-2b}{(x^2+2)^2}$$

$x=1$ で極小値 -1 をとると，

$f(1)=-1$，$f'(1)=0$

よって

$$\begin{cases} -4a-b+2=0 \\ \dfrac{a+b+1}{3}=-1 \end{cases}$$

すなわち

$a=2$，$b=-6$

このとき

$f(x)=\dfrac{2x^2-6x+1}{x^2+2}$，$f'(x)=\dfrac{6(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$ のとき

$x=-2,\ 1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$a=2$，$b=-6$

$x=-2$ のとき極大値 $\dfrac{7}{2}$

このとき確かに

$x=1$ で極小値 -1

$\boxed{5}$ 次の関数に極値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$

(2)　$y=(x+3)\sqrt[3]{(x+2)^2}$

(3)　$y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(4)　$y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5)　$y=2\cos x+\sin 2x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(1) $x\neq 2$

$$y'=\frac{(2x-3)\cdot(x-2)-(x^2-3x+3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$y'=0$ となるとき $x=1,\ 3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$	/	$\searrow$		$\nearrow$

$x=1$ で極大値 -1

$x=3$ で極小値 3

(2) $x+2\neq 0$ すなわち $x\neq -2$ のとき

$$y'=1\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}+(x+3)\cdot\frac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}=\frac{5x+12}{3\sqrt[3]{x+2}}$$

$y'=0$ となるとき $x=-\dfrac{12}{5}$

また関数 $y=(x+3)\sqrt[3]{(x+2)^2}$ は $x=-2$ で微分可能でない

x	$\cdots$	$-\frac{12}{5}$	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	/	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=-\dfrac{12}{5}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt[3]{20}}{25}$

$x=-2$ で極小値 0

(3) $1-\sin x \neq 0$ であるから,

$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x \leqq 2\pi$

$$y' = \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x \leqq 2\pi$ では $1-\sin x > 0$ よって

$y' > 0$ であるから 極値なし

(4) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$x + \frac{\pi}{4} = \pi, 2\pi$

$x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

ゆえに 定義域は

$0 \leqq x < \frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi < x \leqq 2\pi$

また $y' = \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$

$y' = 0$ とすると $\sin x - \cos x = 0$　$0 < x < 2\pi$ の中で

$\tan x = 1$.　$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
y'	/	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$	/
y	1	↘		↗	/	↗		↘	/	↘	1

$x = \frac{\pi}{4}$ で 極小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{5}{4}\pi$ で 極大値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $y' = -2\sin x + 2\cos 2x = -2\sin x + 2(1-2\sin^2 x)$

$= -2(\sin x + 1)(2\sin x - 1)$

$0 < x < 2\pi$ において $y' = 0$ とすると $\sin x = -1, \frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'	/	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	/
y		↗		↘		↗		↗	

$x = \frac{\pi}{6}$ で 極大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{5}{6}\pi$ で 極小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$