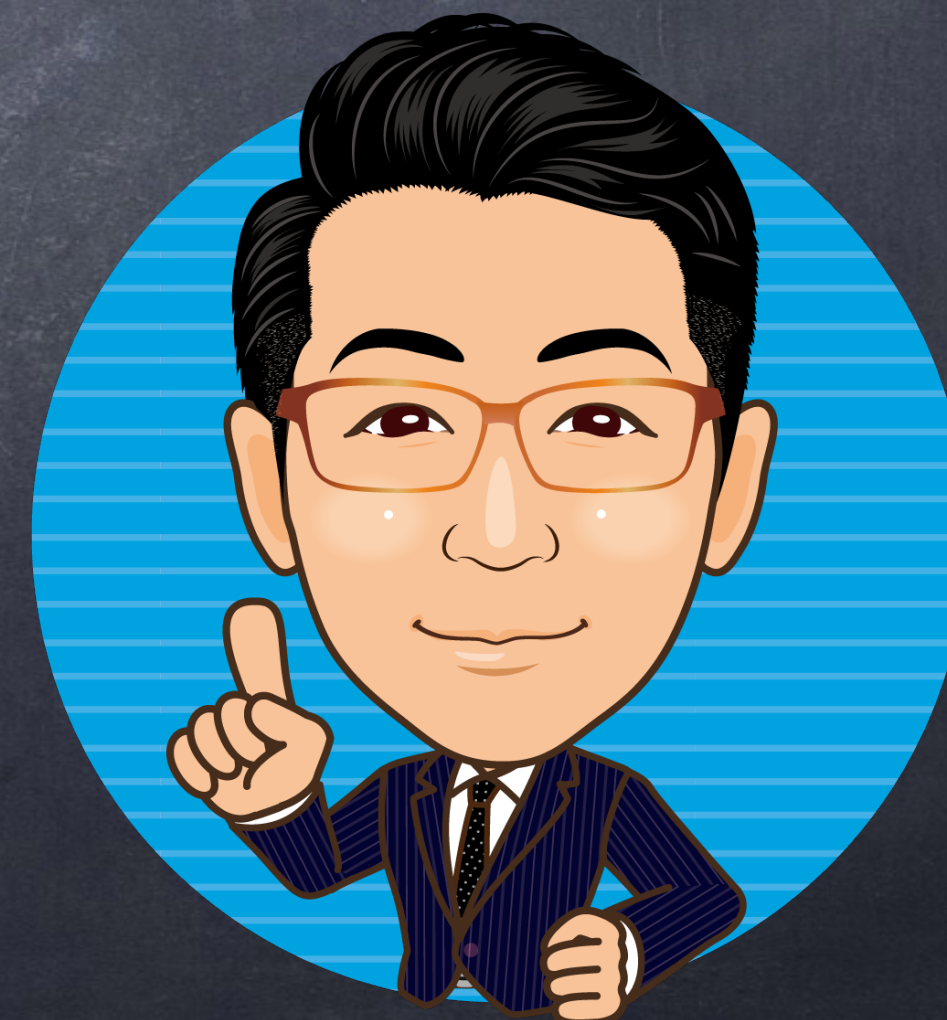


テーマ：

曲線の凹凸（解説）



1 次の曲線の凹凸を調べよ。また、変曲点があればその座標を求めよ。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9$

(2) $y = \sin x \quad (0 < x < 2\pi)$

(3) $y = 2xe^x$

(4) $y = x^2 - \frac{2}{x}$

(5) $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

2 次以下の曲線の凹凸を調べ、変曲点を求めよ。

(1) $y = x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ (2) $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 10$ (3) $y = x + \frac{1}{x}$

(4) $y = \frac{x^3}{x^3 - 1}$ (5) $y = \log(1 + x^2)$ (6) $y = (x^2 - 1)e^{-x}$

$$(3) \quad y = 2xe^x$$

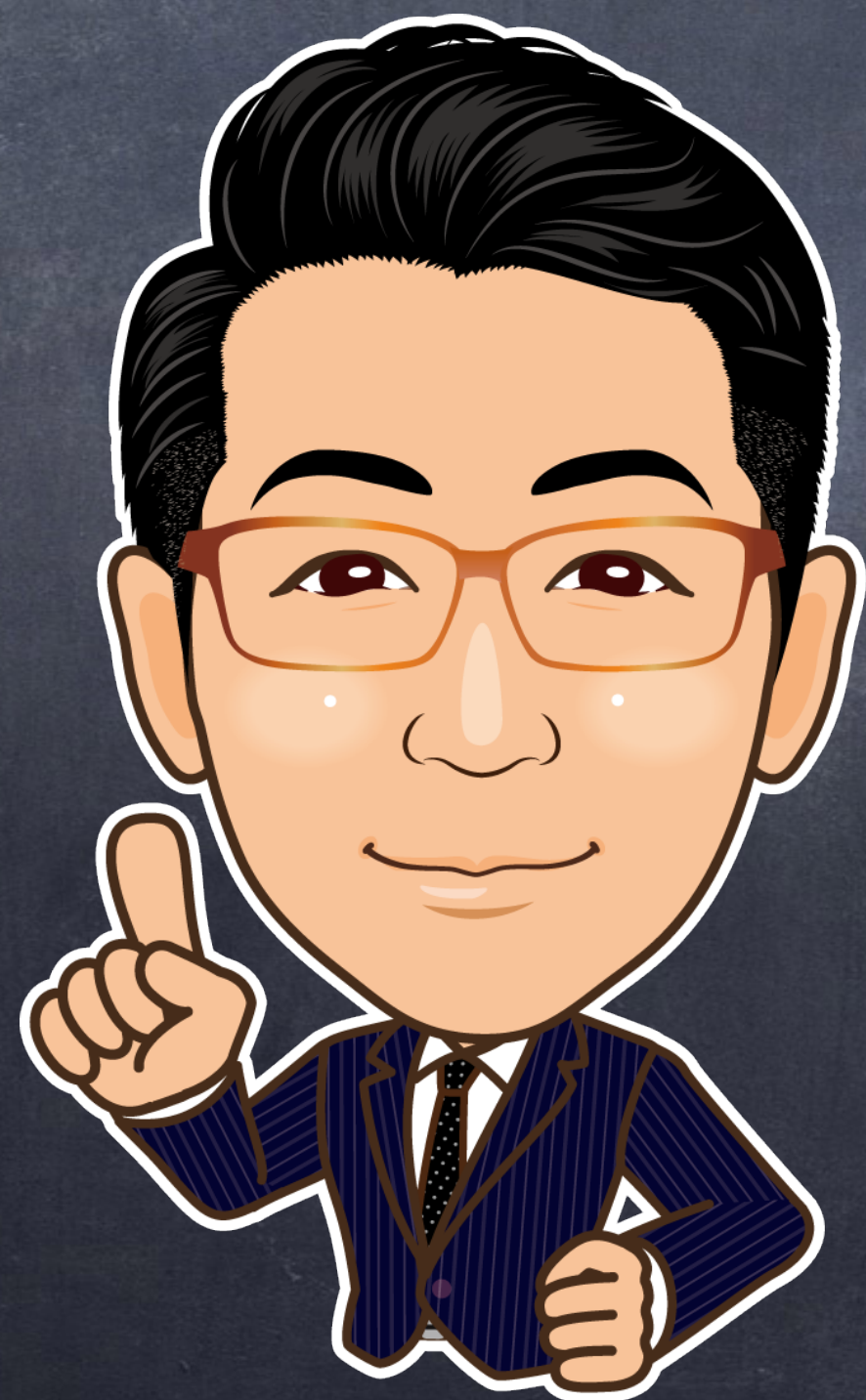
$$y' = 2e^x + 2x \cdot e^x = 2e^x(x+1)$$

$$y'' = 2e^x + 2e^x(x+1)$$

$$= 2e^x(x+2)$$

$$y' = 0 \text{ 或 } x = -1$$

$$y'' = 0 \text{ 或 } x = -2$$



x	...	-2	...	-1	...
y'	-	-	-	0	+
y''	-	0	+	+	+
y	↘	变曲点	↘	极值	↗

$x < -2$ 或 $x > -1$ 上凸

$x > -2$ 或 $x < -1$ 下凸

变曲点 $(-2, -\frac{4}{e^2})$

(5) $y = \log(1 + x^2)$

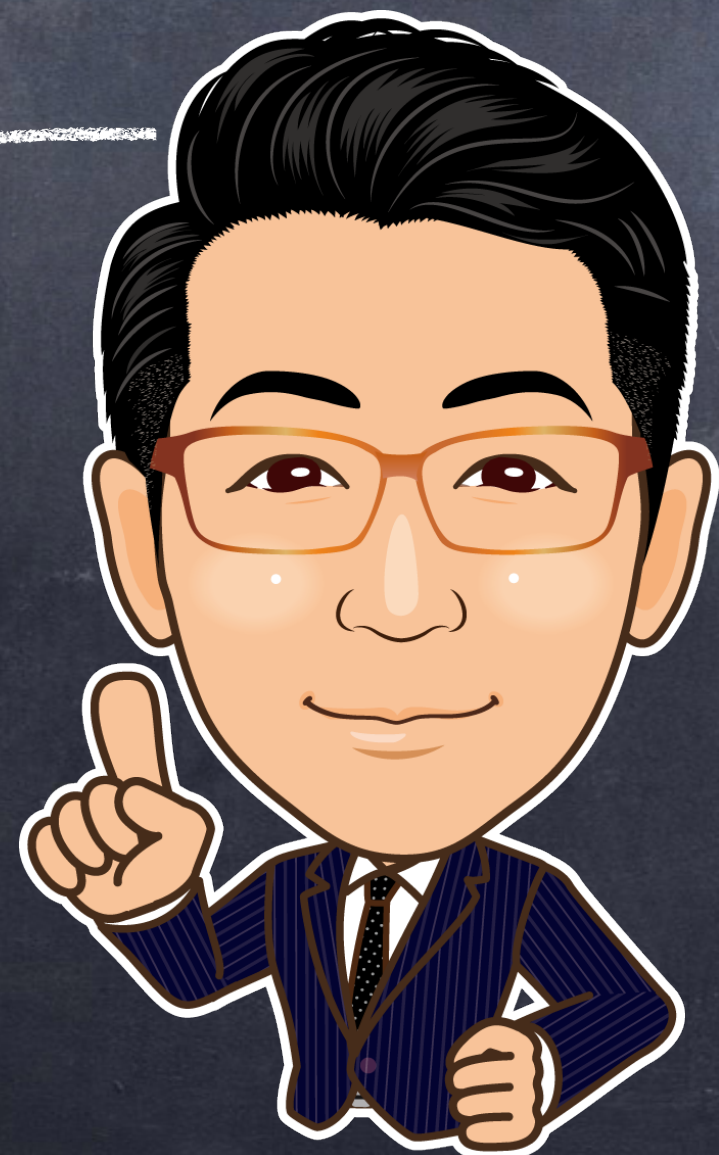
$$y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$y'' = \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(1+x^2)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$



x	...	-1	...	0	...	1	...
y'	-	-	-	0	+	+	+
y''	-	0	+	+	+	0	-
y	↘	变曲点	↙	极值	↗	变曲点	↘

$$x < -1, 1 < x \quad \text{凹} \quad \uparrow \quad \square$$

$$-1 < x < 1 \quad \text{凸} \quad \downarrow \quad \square$$

变曲点 $(-1, \log 2), (1, \log 2)$