$\boxed{1}$ 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x+1}$　　A$\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

(2)　$y=\sqrt{x-2}$　　A$(6,\ 2)$

(3)　$y=\sqrt{25-x^2}$　　A$(-3,\ 4)$

(4)　$y=\cos x$　　A$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(5)　$y=e^x$　　A$\left(-1,\ \dfrac{1}{e}\right)$

(6)　$y=\log x$　　A$(e,\ 1)$

(1) $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$　$x=1$ のとき $y'=-\dfrac{1}{4}$

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-1)$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

法 $y-\frac{1}{2}=4(x-1)$

$y=4x-\frac{7}{2}$

(2) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$x=6$ のとき $y'=\frac{1}{4}$

$y-2=\frac{1}{4}(x-6)$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

法 $y-2=-4(x-6)$

$y=-4x+26$

(3) $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$　$x=-3$ のとき $y'=\frac{3}{4}$

$y-4=\frac{3}{4}(x+3)$

$y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

法 $y-4=-\frac{4}{3}(x+3)$

$y=-\frac{4}{3}x$

(4) $y'=-\sin x$　$x=\frac{\pi}{3}$ のとき

$y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$

法 $y-\frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}$

(5) $y'=e^x$, $x=-1$ のとき $y'=\frac{1}{e}$

$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(x+1)$

$y=\frac{1}{e}x+\frac{2}{e}$

法 $y-\frac{1}{e}=-e(x+1)$

$y=-ex-e+\frac{1}{e}$

(6) $y'=\frac{1}{x}$, $x=e$ のとき $y'=\frac{1}{e}$

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$

$y=\frac{1}{e}x$

法 $y-1=-e(x-e)$

$y=-ex+e^2+1$

2 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+3y^2=6$　A $(\sqrt{3},\ -1)$　　(2)　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$　A $(\sqrt{6},\ 1)$

(3)　$xy=2$　A $(-1,\ -2)$　　(4)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$　A $(9,\ 16)$

(1) xで微分すると

$2x+6y\cdot y'=0$

$6y\cdot y'=-2x$

$y\neq0$のとき

$y'=-\dfrac{x}{3y}$

$x=\sqrt{3},\ y=-1$のとき

$y'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$y-(-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2$

法

$y-(-1)=-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$

$y=-\sqrt{3}x+2$

(2) xで微分すると

$\dfrac{2x}{4}-\dfrac{2y\cdot y'}{2}=0$

$y\neq0$のとき

$y'=\dfrac{x}{2y}$

$x=\sqrt{6},\ y=1$のとき

$y'=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$y-1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}(x-\sqrt{6})$

$y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x-2$

法

$y-1=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}(x-\sqrt{6})$

$y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x+3$

(3) xで微分すると

$y+x\cdot y'=0$

$x\neq0$のとき

$y'=-\dfrac{y}{x}$

$x=-1,\ y=-2$のとき

$y'=-\dfrac{-2}{-1}=-2$

$y-(-2)=-2\{x-(-1)\}$

$y=-2x-4$

法

$y-(-2)=\dfrac{1}{2}\{x-(-1)\}$

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

(4) xで微分すると

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=0$

$\dfrac{1}{\sqrt{y}}y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$x\neq0,\ y\neq0$のとき

$y'=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

$x=9,\ y=16$のとき

$y'=-\dfrac{4}{3}$

$y-16=-\dfrac{4}{3}(x-9)$

$y=-\dfrac{4}{3}x+28$

法

$y-16=\dfrac{3}{4}(x-9)$

$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{27}{4}$

3 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

(1) $y=x+\sqrt{x}$　A (1, 2)　　(2) $y^2=2x$　A (8, 4)

(1) $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x = 1$ のとき

$y' = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$y - 2 = \frac{3}{2}(x-1)$

$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

法

$y - 2 = -\frac{2}{3}(x-1)$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

(2) $2y \cdot y' = 2$

$y \neq 0$ のとき

$y' = \frac{1}{y}$

$x=8,\ y=4$ のとき

$y' = \frac{1}{4}$

$y - 4 = \frac{1}{4}(x-8)$

$y = \frac{1}{4}x + 2$

法

$y - 4 = -4(x-8)$

$y = -4x + 36$

4 媒介変数 t で表された次の曲線について，(　) 内の t の値に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(1) $\begin{cases} x=2-t \\ y=t^2+3 \end{cases}$ $(t=1)$　　(2) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$ $\left(t=\frac{\pi}{4}\right)$

(1) $\frac{dx}{dt} = -1,\ \frac{dy}{dt} = 2t$

$\frac{dy}{dx} = -2t$

$t = 1$ のとき $\frac{dy}{dx} = -2$

$t = 1$ のとき $x = 1,\ y = 4$

$y - 4 = -2(x-1)$

$y = -2x + 6$

(2) $\frac{dx}{dt} = -3\sin t,\ \frac{dy}{dt} = 2\cos t$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\cos t}{3\sin t} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\tan t}$

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $x = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$y = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$y - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$y = -\frac{2}{3}x + 2\sqrt{2}$