1　次のことを証明せよ。

(1)　$x>0$ のとき　$\sqrt{x+4}<\frac{1}{4}x+2$　　(2)　$x>0$ のとき　$e^{-x}>1-x$

(3)　$x>-1$ のとき　$\frac{1+x}{2}>\log(1+x)$

(1) $f(x)=\frac{1}{4}x+2-\sqrt{x+4}$ とする

$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}=\frac{\sqrt{x+4}-2}{4\sqrt{x+4}}$

$x>0$ とすると $f'(x)>0$　　また $f(0)=0$ である

よって $f(x)$ は $x\geqq0$ で増加

つまり $x>0$ のとき $f(x)>0$　よって $\sqrt{x+4}<\frac{1}{4}x+2$

(2) $f(x)=e^{-x}-1+x$ とすると

$f'(x)=-e^{-x}+1=\frac{e^{x}+1}{e^{x}}$

$x>0$ とすると $f'(x)>0$

よって $f(x)$ は $x\geqq0$ で増加，また $f(0)=0$

つまり $x>0$ のとき $f(x)>0$　よって

$e^{-x}>1-x$

(3) $f(x)=\frac{1+x}{2}-\log(1+x)$ とする

$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-1}{2(1+x)}$

$f'(x)=0$ とすると $x=1$

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	$\searrow$		$\nearrow$

$f(1)=1-\log 2$

$x>-1$ のとき最小値 $1-\log 2$

ここで $1-\log 2>0$ である

よって $x>-1$ のとき $f(x)>0$

$\frac{1+x}{2}>\log(1+x)$

2　次のことを証明せよ。

$x>0$ のとき　$1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

$f(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$ とおくと

$f'(x)=-\sin x+x$　　$f''(x)=0$ が成り立つのは $x=2n\pi$ (nは整数)

$f''(x)=-\cos x+1$　　他の解については $f''(x)>0$

よって $f'(x)$ は $x\geqq0$ で増加する　　すなわち $f(x)$ は $x\geqq0$ で増加

ゆえに $x>0$ のとき $f'(x)>f'(0)=0$

また，$f(0)=0$　よって $x>0$ のとき $f(x)>0$

すなわち $1-\frac{x^2}{2}<\cos x$

$g(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{24}-\cos x$ とおく

$g'(x)=-x+\frac{x^3}{6}+\sin x$，　$g''(x)=-1+\frac{x^2}{2}+\cos x=f(x)$

ゆえに $x>0$ のとき $g''(x)>0$ より $g'(x)$ は $x\geqq 0$ で増加

$x>0$ のとき $g'(x)>g'(0)=0$ よって $g(x)$ は $x\geqq 0$ で増加

また $g(0)=0$ より $x>0$ のとき $g(x)>0$ つまり $\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

以上より 与えられた不等式は成立する

3 (1)　関数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ は $0<x<\pi$ で減少することを証明せよ。

(2)　次のことを証明せよ。

$0<\alpha<\beta<\pi$ のとき　$\frac{\beta}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

(1) $f'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$

$g(x)=x\cos x-\sin x$ とおく

$g'(x)=\cos x+x\cdot(-\sin x)-\cos x$

$=-x\sin x$

$0<x<\pi$ のとき

$\sin x>0$ であるから

$g'(x)<0$

ゆえに

$g(x)$ は $0\leqq x<\pi$ で減少

$g(0)=0$

つまり $0<x<\pi$ のとき $g(x)<0$

よって $f'(x)<0$

以上より $f(x)$ は $0<x<\pi$ で減少

(2) (1)から $0<\alpha<\beta<\pi$ のとき

$f(\alpha)>f(\beta)$

すなわち

$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$

$\sin\alpha>0$, $\sin\beta>0$ から

$\frac{\beta}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ となり成立

4 次のことを証明せよ。

$x>0$ のとき　$e^x<1+x+\frac{1}{2}x^2e^x$

$f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2e^x-e^x$ とおくと

$f'(x)=1+xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x-e^x$

$f''(x)=e^x+xe^x+xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x-e^x$

$=\frac{1}{2}x(x+4)e^x$

ゆえに $x>0$ のとき $f''(x)>0$

よって $f'(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する

$f'(0)=0$ より $x>0$ で $f'(x)>0$

つまり $f(x)$ は $x\geqq 0$ で増加する

ここで $f(0)=0$ なので $x>0$ で $f(x)>0$

以上より

$e^x<1+x+\frac{1}{2}x^2e^x$ は成立