1　平均値の定理を用いて，極限 $\lim_{x\to+0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ を求めよ。

$x\to+0$ であるから $x>0$ として考える

関数 $f(x)=e^x$ はすべての実数 x で微分可能で

区間 $[x, \sin x]$ において平均値の定理を用いると

$\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=f'(c)$，$x<c<\sin x$ をみたす実数 c が存在する

また $x\to+0$ のとき $\sin x\to+0$ なので $c\to+0$

$\lim_{x\to+0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{c\to+0}e^c=1$　よって $\underline{1}$

2　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

(1)　$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha$

(2)　$\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ のとき　$a-b<b\log b-a\log a<b-a$

(1) 関数 $f(x)=\sin x$ はすべての実数 x で微分可能で

区間 $[\alpha, \beta]$ において平均値の定理を用いると

$\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}=f'(c)$，$\alpha<c<\beta$ をみたす実数 c が存在する

また $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<c<\dfrac{\pi}{2}$ である

$f'(c)=\cos c$　$0<c<\dfrac{\pi}{2}$ より

$0<\cos c<1$ であるから

ゆえに $\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha}<1$　$\underline{\sin\beta-\sin\alpha<\beta-\alpha}$

(2) 関数 $f(x)=x\log x$ はすべての実数 x で微分可能で

区間 $[a, b]$ において平均値の定理を用いると

$\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ をみたす実数 c が存在する

また $\dfrac{1}{e^2}<a<b<1$ より $\dfrac{1}{e^2}<c<1$，$f'(c)=\log c+1$

$\log\dfrac{1}{e^2}<\log c<\log 1$　$-1<\log c+1<1$

$-2<\log c<0$　ゆえに $-1<\dfrac{b\log b-a\log a}{b-a}<1$　となり成立.

3　平均値の定理を用いて，次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{x\to+0}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}}{x-\sin x}$　　(2)　$\lim_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos x^2}{x-x^2}$

(3)　$\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+3)-\log x\}$

(1) $x\to+0$ なので $x>0$ として考える.

関数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ はすべての実数 x で微分可能で.

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\log\dfrac{1}{2}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\log 2$

区間 $[\sin x, x]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}}{x - \sin x} = f'(c),\quad \sin x < c < x$$ をみたす定数 c が存在する

また $x \to +0$ のとき $\sin x \to +0$ なので $c \to +0$ である

$$\lim_{x \to +0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{c \to +0} \left\{ -\left(\frac{1}{2}\right)^c \log 2 \right\} = \underline{-\log 2}$$

(2) 関数 $f(x) = \cos x$ は、すべての実数 x で微分可能、

$f'(x) = -\sin x$、区間 $[x^2, x]$ で平均値の定理を用いると

$$\frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2} = -\sin c,\quad x^2 < c < x$$ をみたす定数 c が存在する

$x \to 0$ のとき $x^2 \to 0$ なので、$c \to 0$

よって

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x - x^2} = \lim_{c \to 0} (-\sin c) = \underline{0}$$

(3) 関数 $f(x) = \log x$ は、$x > 0$ で微分可能であり

$f'(x) = \frac{1}{x}$、区間 $[x, x+3]$ において平均値の定理を用いると

$$\frac{\log(x+3) - \log x}{x+3-x} = \frac{1}{c},\quad x < c < x+3$$ をみたす定数 c が存在する

ここで、$x\{\log(x+3) - \log x\} = \frac{3x}{c}$

また $0 < x < c < x+3$ より

$$\frac{1}{x+3} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$\times 3x\ (>0)$

$$\frac{3x}{x+3} < \frac{3x}{c} < 3$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{1 + \frac{3}{x}} = 3$$ であるから

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{c} = 3$$ よって

$\underline{3}$